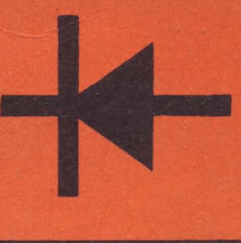


DER JUNGE FUNKER

KLAUS K. STRENG

Formeln, die man sucht



24

Der Junge Funker · Band 24

Klaus K. Streng

Formeln, die man sucht



Militärverlag
der Deutschen Demokratischen
Republik

1. Auflage, 1979, 1.-15. Tausend
Lizenz-Nr. 5
LSV: 3539
Lektor: Wolfgang Stammler
Zeichnungen: Wilhelm Kaufmann
Typografie: Günter Molinski
Hersteller: Michael Haase
Korrektor: Gertraut Purfürst
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig - III/18/97
Redaktionsschluß: 1. August 1978
Bestellnummer: 746 072 5
DDR 1,90 M

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Als ich vor vielen Jahren begann, mich für die «Radiotechnik» zu interessieren (der Begriff «Elektronik» war noch nicht geläufig), fragte ich oft: «Wie berechnet man ...?» – Ihnen wird es bestimmt nicht anders gehen! Einige erfahrenere Kollegen gaben mir Antwort auf meine Fragen. Später lernte ich, selbst die Antwort auf meine Fragen in der Fachliteratur zu finden. Um die Formeln, die ich gefunden, griffbereit zu haben, schrieb ich sie mir auf. Mein privates Nachschlagewerk wurde oft belächelt und noch öfter ausgeliehen. Später entdeckte ich, daß viele Fachkollegen Notizbücher anlegten, in denen die Formeln standen, «die man sucht».
Um anderen das Sammeln zu erleichtern, schrieb ich diese Broschüre. Für Hilfe und Ratschläge danke ich u. a. Herrn *Dipl.-Ing. Peter Finck* und *Fräulein Dipl.-Lehrer Eva Streng*. Der Inhalt der Broschüre geht nicht über den Stoff der 10. Klasse der Oberschule hinaus. Allerdings: Wer sich als Amateur oder hauptberuflich mit Elektronik beschäftigen will, muß rechnen können! Diese kleine Broschüre zeigt nur das Wie. Bei allen Formeln wurde grundsätzlich mit Grundmaßbezeichnungen gearbeitet, also mit Volt (V), Ampere (A), Ohm (Ω) und Hertz (Hz). Die Genauigkeit in den Beispielen ist auf 3 Stellen angegeben, da erfahrungsgemäß in der Elektronik fast nie eine größere Genauigkeit gefordert wird. Die Rechenregeln werden als bekannt vorausgesetzt, erklärt wird nur, wie man in der Elektronik eine Größe berechnet. Hoffentlich finden auch Sie hier die Formeln, die Sie suchen.

Berlin, Sommer 1978 *Klaus K. Streng*

Literaturhinweise

Es werden nur die wichtigsten Quellen angegeben.

Autorenkollektiv: electronicum; Deutscher Militärverlag, Berlin 1967
Balcke, E. / Heisterberg, J.: HF- und Verstärkertechnik, Aufgaben und Formelsammlung, VEB Verlag Technik, Berlin 1969
Domsch, G. H.: Der Übertrager der Nachrichtentechnik, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1953
Fischer, H. J.: Transistortechnik für den Funkamateur, Deutscher Militärverlag, Berlin 1968
Fricke, H. W.: Ableitungen und Formeln der Funk- und Fernmeldetechnik, Band II. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1952
Grafe, H. / Matthes, G. / Loose, J. u. a.: Grundlagen der Elektrotechnik (Band II), VEB Verlag Technik, Berlin 1969
Kammerloher, J.: Transistoren (Band I), C. F. Winter'sche Verlagshandlung, Prien 1960
Limann, O. / Hassel, W.: Hilfsbuch für Hochfrequenztechniker, Band II, Franzis-Verlag, München 1960
Lindner, H.: Elektro-Aufgaben, Band I: Gleichstrom, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968
Lindner, H.: Elektro-Aufgaben, Band II: Wechselstrom, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1974
Meinke, H. H.: Die komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1949
Mildenberger, D.: Analyse elektronischer Schaltkreise, Band 1, Hüthig- und Pflaum-Verlag GmbH & Co. KG, München/Heidelberg 1975
Müller, F.: Fünfstellige Logarithmen und andere mathematische Tafeln, Fachbuchverlag GmbH, Leipzig 1953
Stepowicz, W. J.: Frequency properties of a Darlington composite transistor, Int. J. Electronics, 35 (1973) 4, Seite 507 bis 512
Teuchert, H. / Wahl, K.: Grundlagen der Elektrotechnik (Band I), VEB Verlag Technik, Berlin 1961
Völz, H.: Elektronik für Naturwissenschaftler, Akademie-Verlag
... : A handbook for telecommunication engineers, Budavox Telecommunication Company, Budapest 1959
... : Telefunken Fachbuch: Der Transistor, Band I
... : Telefunken Fachbuch: Röhre und Transistor als Vierpol
... : Telefunken-Laborbuch, Band I, Ulm/Donau 1957

Einleitung

Falls Sie zu den Leuten gehören, die ein Buch zunächst einmal hinten aufschlagen, dann legen Sie diese Broschüre vielleicht gleich wieder aus der Hand mit dem Seufzer: «Das verstehe ich sowieso nicht!» Und das ist wahrscheinlich falsch. In dieser Broschüre sind etwas willkürlich einige wichtige Formeln zusammengestellt, die der Elektroniker gelegentlich benötigt. Die letzten Formeln sind wohl etwas schwieriger als die ersten. Aber keine Gleichung in dieser Broschüre geht über den Stoff der Oberschule hinaus. Differential- und Integralrechnungen, um nur zwei wichtige Teilgebiete des weiterführenden Mathematikstoffes zu nennen, fehlen völlig.
Jede der gezeigten Formeln ist an Hand eines Beispiels anschaulich gemacht. So kann auch der Leser, der die Gleichung nicht gleich überblickt, ihre praktische Anwendung erkennen. Also, nur Mut. Allerdings: Ohne Mathematik geht es in der Technik nicht! Diese Broschüre soll nur Hilfestellung geben. Alle Rechenbeispiele sind mit einem Taschenrechner überprüft worden. Abgesehen von leider immer möglichen Schreib- oder Druckfehlern, können Sie sich auf das Material verlassen.
Einige Hinweise: In den Beispielen sind die Maßbezeichnungen immer mitgeschrieben. Dieses Vorgehen ist, obwohl zeitaufwendig, aber unbedingt zu empfehlen. Man erkennt bei Rechnungen sofort, ob das Ergebnis physikalisch überhaupt möglich ist. Wenn z. B. ein zu berechnender Widerstand die Maßbezeichnung VA (Voltampere) hat, ist die Rechnung falsch gewesen!
Bei den Maßeinheiten wird vorausgesetzt, daß die Einheit der Frequenz s^{-1} oder Hz sein kann, beides ist gleich. Nur, s^{-1} kürzt sich unter Umständen besser. Ebenso verhält es sich mit der Einheit der elektrischen Leistung Watt, die aus dem Produkt V · A entstanden ist. Vorausgesetzt wird die Kenntnis davon, daß man die Kapazität in Farad (F) mißt, das selbst aus den Maßeinheiten AsV^{-1} ($= S \cdot s$) entstanden ist, genauso wie die Maßeinheit der Induktivität Henry (H) aus VsA^{-1} ($= \Omega s$).
Als bekannt vorausgesetzt werden die gängigen mathematischen Operationen wie Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren, Bruchrechnung und Klammerrechnung. Diese Dinge muß auch der angehende Elektroniker beherrschen. Sollte manches entfallen sein – das kann jedem passieren –, gibt es Mathematikbücher zum Nachschlagen. Auf den folgenden Seiten wird darüber nichts zu finden sein.

1. Widerstand und Leistung

1.1. *Ohm*sches Gesetz

Das *Ohm*sche Gesetz lautet:

$$U = IR. \tag{1.1.}$$

Das Gesetz besagt, daß sich Strom und Spannungsabfall in einem Widerstand streng proportional verhalten. Sind 2 der Größen U, I und R bekannt, läßt sich aus ihnen die dritte Größe errechnen. Zu ergänzen ist: Das *Ohm*sche Gesetz besagt, daß bei konstanter Temperatur sich Spannung(sabfall), Strom und Widerstand proportional verhalten. Da bei Rechnungen eine konstante Temperatur vorausgesetzt wird, kürzt man ab:

$U = IR.$

Beispiel

Durch einen Widerstand von 154 Ω fließt ein Strom von 270 mA. Wie groß ist der Spannungsabfall an dem Widerstand?

Lösung

Nach Gl. (1.1.) ist

$$U = 0{,}27\ \mathrm{A} \cdot 154\ \mathrm{VA}^{-1} = 41{,}6\ \mathrm{V}.$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die bekannten Umformungen des *Ohm*schen Gesetzes angegeben:

$$I = \frac{U}{R}, \tag{1.1.a}$$

$$R = \frac{U}{I}. \tag{1.1.b}$$

Beispiel

An einem Widerstand von 4,7 kΩ steht eine Spannung von 220 V. Wie groß ist der Strom durch den Widerstand?

Lösung

Nach Gl. (1.1.a) ist

$$I = \frac{220\ \mathrm{V}}{4{,}7 \cdot 10^{3}\ \mathrm{VA}^{-1}} = 4{,}68 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{A} = 46{,}8\ \mathrm{mA}.$$

Beispiel

Wie groß ist ein Widerstand, durch den bei 134 V Klemmenspannung ein Strom von 3,23 A fließt?

Lösung

Nach Gl. (1.1.b) ist

$$R = \frac{134\ \text{V}}{3{,}23\ \text{A}} = 41{,}5\ \text{VA}^{-1}\ (= \Omega).$$

Der Gesamtwiderstand lautet bei Reihenschaltung einzelner Widerstände (Bild 1.1.a)

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \qquad (1.2.)$$

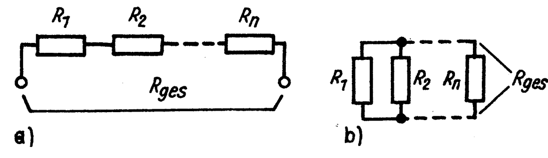


Bild 1.1 a) Reihenschaltung von Widerständen, b) Parallelschaltung von Widerständen

bei der Parallelschaltung von einzelnen Widerständen (Bild 1.1.b)

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \qquad (1.3.)$$

bzw. bei Parallelschaltung von 2 Widerständen

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,. \qquad (1.3.a)$$

Beachte

Bei Parallelschaltungen von Widerständen ist es oft sinnvoller, an Stelle von Widerständen besser mit ihren Leitwerten zu rechnen. Der Leitwert G ist der reziproke Wert des Widerstandes (Einheit $S = 1/\Omega$). Die für Widerstände gültigen Rechenregeln gelten uneingeschränkt auch für Leitwerte.

Beispiel

Drei Widerstände, von 5 Ω, 11 Ω und 7,5 Ω, liegen parallel. Wie groß ist ihr Gesamtwiderstand?

Lösung

Mit einer Nebenrechnung werden die Widerstände in Leitwerte umgerechnet:

$$R_1 = 5\,\Omega, \quad G_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2\,S,$$

$$R_2 = 11\,\Omega, \quad G_2 = \frac{1}{11} = 0{,}0909 \approx 0{,}091\,S,$$

$$R_3 = 7{,}5\,\Omega, \quad G_3 = \frac{1}{7{,}5} = 0{,}133\,S.$$

Durch Addition der Einzelleitwerte ergibt sich der Gesamtwert:

$$G_{ges} = 0{,}2\,S + 0{,}091\,S + 0{,}133\,S = 0{,}424\,S$$

oder

$$R_{ges} = \frac{1}{0{,}424\,S} = 2{,}36\,\Omega.$$

Tabelle 1.1. Spezifischer Widerstand und spezifischer Leitwert einiger Leiter bei 20 °C

Werkstoff	spezifischer Widerstand in $m^{-1}\,mm^{-2}\,\Omega$	spezifischer Leitwert in $m\,mm^{-2}\,\Omega^{-1}$
a) reine Metalle		
Aluminium	0,0282	35,5
Blei	0,21	4,76
Eisen	0,13	7,69
Kupfer	0,0175	57,1
Nickel	0,10	10,0
Platin	0,094	10,6
Quecksilber	0,95	1,05
Silber	0,016	62,5
Wolfram	0,055	18,2
Zink	0,06	16,7
Zinn	0,13	7,69
b) Legierungen		
Konstantan	0,50	2,00
Nickelin	0,30	3,33
Messing	0,074	13,5
Elektron	0,0833	12,0
c) sonstige Leiter		
Graphit (C)	20 ... 100	0,05 ... 0,01
Silit (SiC)	1000	0,001

(nach *Friedrich, W.:* Tabellenbuch für die Elektrotechnik)

Der Widerstand eines Leiters («Draht») ist

$$R = \varrho \frac{l}{A}\,; \tag{1.4.}$$

l – Länge des Leiters, A – Querschnitt (Fläche) des Leiters, ϱ – spezifischer Widerstand des Leiters (Materialkonstante), siehe Tabelle 1.1.

Beispiel

Der Widerstand eines Aluminiumdrahtes von 2 mm Durchmesser und 150 m Länge ist zu berechnen.

Lösung

$$R = \frac{150\ \mathrm{m}}{\pi(1\ \mathrm{mm})} \cdot 0{,}0282\ \mathrm{m^{-1}\ mm^2}\ \Omega = 1{,}35\ \Omega$$

Man kann auch an Stelle mit dem spezifischen Widerstand ϱ mit dem spezifischen Leitwert $\varkappa$ rechnen (Tabelle 1.1.). Da $\varrho = 1/\varkappa$ ist, ändert sich Gl. (1.4.) in

$$R = \frac{l}{\varkappa A}\,. \tag{1.4.a}$$

Beispiel

Konstantendraht von 0,8 mm Durchmesser ist auf einen Widerstandskörper aufgewickelt. Wie lang muß der Draht sein, um den Widerstandswert 15 Ω zu erreichen?

Lösung

Gl. (1.4.a) wird nach l aufgelöst:

$$l = \varkappa A R, \tag{1.4.b}$$

und mit den bekannten Werten ergibt sich

$$l = 2{,}00\ \mathrm{m}\,\Omega^{-1}\ \mathrm{mm^{-2}}\ \pi \cdot 0{,}4^2\ \mathrm{mm^2} \cdot 15\ \Omega = 15{,}08\ \mathrm{m}.$$

1.2. Temperatureinfluß auf den Widerstand

Bei Temperaturänderung ändert sich im allgemeinen auch der ohmsche Widerstand eines Leiters: Er nimmt zu (positiver Temperaturkoeffizient) bei fast allen Metallen und nimmt ab, wenn die Temperatur (negativer Temperaturkoeffizient) bei den Halbleitern steigt. An diesem unterschiedlichen Temperaturverhalten kann man Metalle von

Halbleitern deutlich unterscheiden. Fast alle reinen Metalle ändern ihren Widerstand um etwa $+4^0/_{00}$ je °C (s. Tabelle 1.1.). Widerstand und Temperatur sind durch folgende Beziehung verknüpft:

$$R_w = R_k(1 \pm \Delta\vartheta\alpha); \tag{1.5.}$$

R_w – Warmwiderstand, d. h. der Widerstand bei der betrachteten Temperatur, R_k – Widerstand bei Zimmertemperatur (s. Tabelle 1.1.), $\Delta\vartheta$ – Übertemperatur, d. h. die Differenz $\vartheta_w - \vartheta_k$, α – Temperaturkoeffizient des Leiters (s. Tab. 1.2.).

Tabelle 1.2. Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes einiger Leiter

Werkstoff	Temperaturkoeffizient α des elektrischen Widerstandes in K^{-1}
a) reine Metalle	
Aluminium	0,004
Blei	0,0036
Eisen	0,0048
Kupfer	0,0038
Nickel	0,004
Platin	0,0039
Quecksilber	0,0009
Silber	0,0038
Wolfram	0,0041
Zink	0,0037
Zinn	0,0042
b) Legierungen	
Konstantan	$-5 \cdot 10^{-6}$
Nickelin	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$
Messing	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$
Elektron	$2{,}55 \cdot 10^{-5} \ldots 2{,}7 \cdot 10^{-5}$
c) sonstige Leiter	
Graphit, Silit	$-2 \cdot 10^{-4} \ldots 7 \cdot 10^{4}$

(nach *Friedrich, W.:* Tabellenbuch für die Elektrotechnik)

Beachte

Gl. (1.5.) gilt auch für Temperaturerniedrigungen, $\Delta\vartheta$ ist dann negativ.

Beispiel

Wie groß ist der Widerstand eines Transformators (Kupferwicklung) bei 35 K (= Kelvin; früher Grad) Übertemperatur, wenn sein Kaltwiderstand $R_k = 43{,}5\ \Omega$ beträgt?

Lösung

$$R_w = 43{,}5\ \Omega\ (1 + 35\ \mathrm{K} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}) = 49{,}3\ \Omega$$

Oft interessiert die Temperaturerhöhung (= Übertemperatur) bzw. die Temperatur im erwärmten Zustand, wenn von einem Leiter Kalt- und Warmwiderstand bekannt sind; auf diesem Prinzip beruhen die Widerstandthermometer.
Zur Berechnung der Temperaturerhöhung wird Gl. (1.5.) umgestellt:

$$\Delta\vartheta = \frac{R_w - R_k}{R_k \alpha}\,. \tag{1.5.a}$$

Beispiel

An einer Kupferwicklung werden ein Kaltwiderstand von 437 Ω und ein Warmwiderstand von 522 Ω gemessen. Wie groß ist die zwischen beiden Widerstandsmessungen aufgetretene Temperaturerhöhung?

Lösung

$$\Delta\vartheta = \frac{522\ \Omega - 437\ \Omega}{437\ \Omega \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}} = 51{,}2\ \mathrm{K}$$

Beachte

Die Gl. (1.5.) und (1.5.a) gelten nur im Temperaturbereich von etwa ±150 K von der Zimmertemperatur abweichend.

1.3. **Spannungsteiler** (Bild 1.2 a)

Für die Berechnung des unbelasteten Spannungsteilers gilt folgende Gleichung:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\,. \tag{1.6.a}$$

Beispiel

Wie groß ist die Teilspannung U_2, wenn die Gesamtspannung 100 V und die Spannungsteilerwiderstände 6,8 kΩ (R_1) und 1,8 kΩ (R_2) sind?

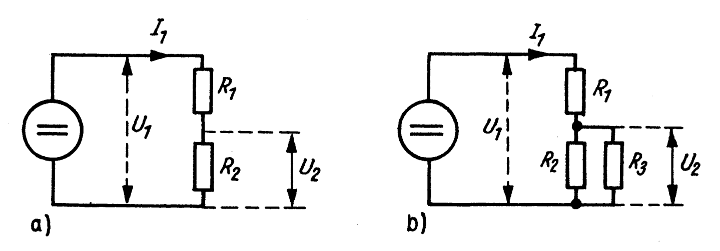


Bild 1.2 a) unbelasteter, b) belasteter Spannungsteiler

Lösung

Gl. (1.6.a) nach U_2 aufgelöst:

$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} . \qquad (1.6.b)$$

Mit den Werten des Beispiels ergibt sich

$$U_2 = 100\,\text{V} \frac{1{,}8 \cdot 10^3\,\text{VA}^{-1}}{6{,}8 \cdot 10^3\,\text{VA}^{-1} + 1{,}8 \cdot 10^3\,\text{VA}^{-1}} = 20{,}9\,\text{V} .$$

Belasteter Spannungsteiler (Bild 1.2b):

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3}{R_2R_3} . \qquad (1.6.c)$$

Beispiel

Wie groß muß die Gesamtspannung U_1 sein, wenn die Spannungsteilerwiderstände $R_1 = 150\,\Omega$, $R_2 = 220\,\Omega$, $R_3 = 270\,\Omega$ und $U_2 = 24$ V betragen?

Lösung

Gl. (1.6.c) nach U_1 aufgelöst:

$$U_1 = \frac{U_2[R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3}{R_2R_3} . \qquad (1.6.d)$$

Mit den Werten des Beispiels ergibt sich

$$U_1 = \frac{24\,\text{V}\,[150\,\text{VA}^{-1}\,(220\,\text{VA}^{-1} + 270\,\text{VA}^{-1}) + 220\,\text{VA}^{-1} \cdot 270\,\text{VA}^{-1}]}{220\,\text{VA}^{-1} \cdot 270\,\text{VA}^{-1}}$$
$$= 53{,}7\,\text{V} .$$

Berechnung der in einem Widerstand umgesetzten elektrischen Leistung:

$$\text{Leistung } P = UI \qquad (1.7.)$$

bzw. zusammen mit dem *Ohm*schen Gesetz, d. h. Gl. (1.1.),

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \tag{1.7.a}$$

oder

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} \tag{1.7.b}$$

oder

$$U = \sqrt{PR}\ . \tag{1.7.c}$$

Beispiel

Wie groß ist die Leistung, die in einem Widerstand umgesetzt wird: $R = 259\ \Omega$, $I = 170\ \text{mA}$, $U = 44\ \text{V}$?

Lösung

$$P = 44\ \text{V} \cdot 0{,}17\ \text{A} = 7{,}48\ \text{VA} = 7{,}48\ \text{W}$$

oder

$$P = \frac{44^2\ \text{V}^2}{259\ \text{VA}^{-1}} \approx 7{,}48\ \text{W}$$

Beispiel

Zwei Widerstände, von 346 Ω und 543 Ω, sind parallel geschaltet und liegen an einer Spannung von 110 V. Wie groß sind der Gesamtwiderstand und die Leistungen, die in den einzelnen Widerständen umgesetzt werden?

Lösung

Nach Gl. (1.3.a) ist

$$R_{ges} = \frac{543 \cdot 346\ \text{V}^2\text{A}^{-2}}{543 + 346\ \text{VA}^{-1}} = 211{,}3\ \Omega .$$

Nach Gl. (1.7.a) ergibt sich

$$P_1 = \frac{110^2\ \text{V}^2}{543\ \text{VA}^{-1}} = 22{,}28\ \text{W},$$

$$P_2 = \frac{110^2\ \text{V}^2}{346\ \text{VA}^{-1}} = 34{,}97\ \text{W}.$$

Beispiel

Ein Spannungsteiler soll eine Spannung $U_1 = 220\ \text{V}$ auf $U_2 = 36\ \text{V}$ herunterteilen. Dabei fließen durch den «Verbraucher» R_3 bei 36 V 200 mA. Im «Leerlauf» soll der Spannungsteiler eine Leistung von

20 W umsetzen. Wie groß sind: a) die Widerstände R_1, R_2 und R_3, b) die Leistung in R_3 und c) der Strom durch den belasteten Spannungsteiler? (s. hierzu Bild 1.2).

Lösungen

a) Mit Gl. (1.1.) ist

$$R_3 = \frac{36\ \text{V}}{0{,}2\text{A}} = 180\,\Omega,$$

$$I_1 = \frac{20\ \text{VA}}{220\ \text{V}} = 9{,}09 \cdot 10^{-2}\ \text{A} = 90{,}9\ \text{mA im Leerlauf und}$$

$$I_{1La} = 90{,}9\ \text{mA} + 200\ \text{mA} = 290{,}9\ \text{mA}.$$

Damit ist

$$R_1 = \frac{220\ \text{V} - 36\ \text{V}}{290{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{A}} = 632{,}5\,\Omega,$$

$$R_2 = \frac{36\ \text{V}}{9{,}09 \cdot 10^{-2}\ \text{A}} = 396\,\Omega$$

und

b) $$P_3 = 36\ \text{V} \cdot 0{,}2\ \text{A} = 7{,}2\ \text{W}.$$

1.4. Stern-Dreieck-Umwandlung

Eine Sternschaltung (Bild 1.3 a) kann in eine Dreieckschaltung (Bild 1.3 b) umgewandelt werden und umgekehrt, ohne daß sich die in jeden Punkt (A, B, C) hineinfließenden Ströme bzw. die dort wirken-

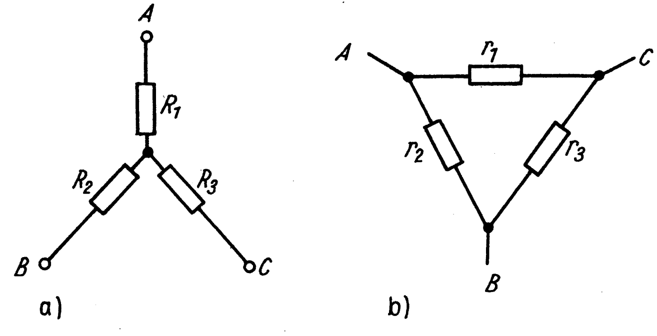


Bild 1.3 a) Sternschaltung, b) Dreieckschaltung von Widerständen

den Spannungen etwas geändert hätten. Die dafür geltenden Beziehungen sind:

$$R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}, \quad (1.8.a) \qquad r_1 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}, \quad (1.9.a)$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}, \quad (1.8.b) \qquad r_2 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}, \quad (1.9.b)$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}, \quad (1.8.c) \qquad r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}. \quad (1.9.c)$$

Beispiel

Ein Widerstandsstern mit den Werten 6,8 Ω, 9,1 Ω und 4,7 Ω ist in eine äquivalente Dreieckschaltung umzurechnen.

Lösung

Nach Gl. (1.9.a) bis Gl. (1.9.c) ist

$$r_1 = \frac{6{,}8 \cdot 9{,}1 + 9{,}1 \cdot 4{,}7 + 6{,}8 \cdot 4{,}7}{6{,}8} = 20{,}09\,\Omega,$$

$$r_2 = \frac{6{,}8 \cdot 9{,}1 + 9{,}1 \cdot 4{,}7 + 6{,}8 \cdot 4{,}7}{9{,}1} = 15{,}01\,\Omega,$$

$$r_3 = \frac{6{,}8 \cdot 9{,}1 + 9{,}1 \cdot 4{,}7 + 6{,}8 \cdot 4{,}7}{4{,}7} = 29{,}07\,\Omega.$$

(Die Maßeinheiten sind in den Rechnungen ausnahmsweise nicht mitgeschrieben, da nur die einzig genannte Maßeinheit – Ω – herauskommen kann.)
Die Stern-Dreieck-Umwandlung läßt sich prinzipiell auch mit Blindwiderständen (Induktivitäten und Kapazitäten) durchführen.

2. Dämpfungsglieder

2.1. Das L-Glied (Bild 2.1)

Bedingungen:

a) $R_i = R_a = Z$.
b) Bei jeder Dämpfung, d. h. bei allen möglichen Werten von R_1 und R_2 soll der Generator konstant mit R_a belastet sein. Mathematisch wird dies durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$R_1 = \frac{R_2 R_a}{R_2 + R_a}. \tag{2.1.a}$$

Mit $A = \frac{U_2}{U_1}$ wird

$$R_1 = \frac{Z(A - 1)}{A} \tag{2.1.b}$$

und

$$R_2 = \frac{Z}{A - 1}. \tag{2.1.c}$$

Wird die Dämpfung durch das logarithmische Dämpfungsmaß Neper (s. Abschnitt 6.1.) ausgedrückt, so tritt an Stelle von A der Ausdruck e^a auf, worin e die Basis des natürlichen Logarithmus ($e = 2{,}718282\ldots$) und a die Spannungsdämpfung in Neper ist.

Beispiel

Mit $R_i = R_a = Z = 600\ \Omega$ soll ein Dämpfungsglied realisiert werden, das die Eingangsspannung auf 1:534 (oder 6,28 Np) dämpft. Wie groß sind R_1 und R_2?

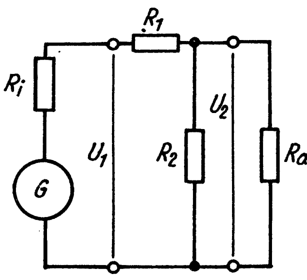


Bild 2.1
L-Glied

Lösung

Mit Gl. (2.1.b, c) ist

$$R_1 = \frac{600\,\Omega\,(534 - 1)}{534} = 599\,\Omega,$$

$$R_2 = \frac{600\,\Omega}{534 - 1} = 1{,}13\,\Omega.$$

2.2. Das T-Glied (Bild 2.2)

In diesem Fall ist

$$R_1 = Z\frac{A - 1}{A + 1} = Z \tanh \frac{a}{2}, \qquad (2.2.a)$$

$$R_2 = \frac{2ZA}{(A + 1)(A - 1)} = \frac{2ZA}{A^2 - 1} = \frac{Z}{\sinh a} \qquad (2.2.b)$$

bzw.

$$Z = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)}. \qquad (2.2.c)$$

Beispiel

Ein *T*-Glied soll bei $R_i = R_a = 200\,\Omega$ die Spannung U_1 um 2,5 Np dämpfen. Wie groß sind R_1 und R_2?

Lösung

Nach Gl. (2.2.a, b) sind:

$$R_1 = 200\,\Omega\frac{e^{2,5} - 1}{e^{2,5} + 1} = 170\,\Omega,$$

$$R_2 = \frac{2 \cdot 200\,\Omega\, e^{2,5}}{(e^{2,5} + 1)(e^{2,5} - 1)} = 33{,}1\,\Omega.$$

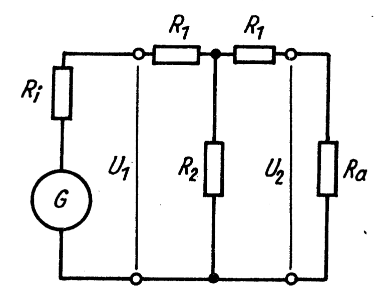


Bild 2.2
T-Glied

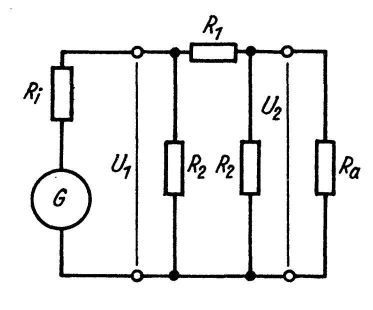


Bild 2.3
π-Glied

Kontrolle

Nach Gl. (2.2.c) ist $Z = \sqrt{170\,\Omega\,(170\,\Omega + 2 \cdot 33{,}1\,\Omega)} = 200\,\Omega$.

2.3. Das π-Glied (Bild 2.3)

Es ist

$$R_1 = \frac{Z}{2}\,\frac{(A+1)(A-1)}{A} = Z \sinh a, \tag{2.3.a}$$

$$R_2 = Z\,\frac{(A+1)}{(A-1)} = Z \coth a \tag{2.3.b}$$

bzw.

$$Z = R_2 \sqrt{\frac{R_1}{2R_2 + R_1}}. \tag{2.3.c}$$

Beispiel

Ein π-Glied mit $R_i = R_a = Z = 1000\,\Omega$ soll die Spannung um 5 Np dämpfen. Wie groß sind R_1 und R_2?

Lösung

Nach Gl. (2.3.a, b) ist

$$R_1 = \frac{1000\,\Omega}{2}\,\frac{(e^5+1)(e^5-1)}{e^5} = 74\,200\,\Omega,$$

$$R_2 = 1000\,\Omega\,\frac{(e^5+1)}{(e^5-1)} = 1010\,\Omega.$$

Kontrolle

Nach Gl. (2.3.c) ist $Z = 1010\,\Omega \sqrt{\dfrac{74\,200\,\Omega}{2 \cdot 1010\,\Omega + 74\,200\,\Omega}} = 1000\,\Omega.$

Man kann die hier gezeigten unsymmetrischen T- und π-Glieder

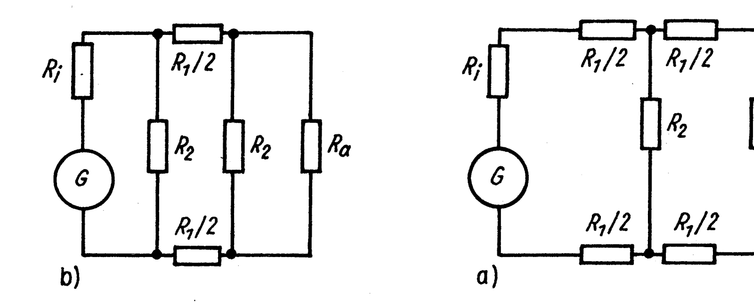


Bild 2.4 a) symmetrisches T-Glied (H-Glied), b) symmetrisches π-Glied

leicht in symmetrische T- und π-Glieder umwandeln, indem man jeweils die Längswiderstände R_1 halbiert und in beide Adern legt (Bild 2.4).

2.4. Das X-Glied (Bild 2.5)

Es ist

$$R_1 = Z\frac{A+1}{A-1} = Z \coth\frac{a}{2}, \tag{2.4.a}$$

$$R_2 = Z\frac{A-1}{A+1} = Z \tanh\frac{a}{2} \tag{2.4.b}$$

bzw.

$$Z = \sqrt{R_1 R_2}\,. \tag{2.4.c}$$

Beispiel

Ein X-Glied soll um den Faktor 5 dämpfen, sein Wellenwiderstand Z ist 200 Ω. Wie groß müssen seine Widerstände R_1 und R_2 sein?

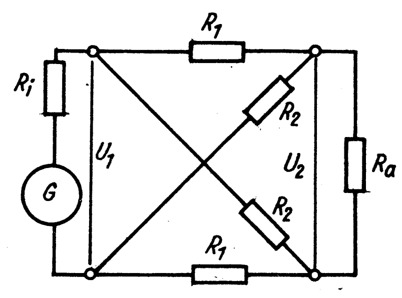


Bild 2.5
X-Glied

Lösung

Nach Gl. (2.4.a, b) ist

$$R_1 = 200\,\Omega \cdot \frac{5+1}{5-1} = 300\,\Omega,$$

$$R_2 = 200\,\Omega \cdot \frac{5-1}{5+1} = 133\,\Omega.$$

Kontrolle

Nach Gl. (2.4.c) ist $Z = \sqrt{300\,\Omega \cdot 133\,\Omega} = 200\,\Omega$.
Möglich ist auch die Berechnung der (logarithmischen) Dämpfung in Np, wenn nur die Widerstände R_1 und R_2 bekannt sind. Es ergibt sich für das T-Glied:

$$a = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right); \qquad (2.2.c)$$

für das π-Glied:

$$a = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right); \qquad (2.3.c)$$

für das X-Glied:

$$a = \operatorname{arcosh}\frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}. \qquad (2.4.c)$$

Beispiel

Ein T-Glied hat die Widerstände $R_1 = 100\,\Omega$ und $R_2 = 10\,\Omega$. Wie groß ist seine Dämpfung?

Lösung

$$a = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{100\,\Omega}{10\,\Omega}\right) = 3{,}09\ \text{Np}$$

Beispiel

Wie groß ist die Dämpfung eines π-Gliedes, wieder mit $R_1 = 100\,\Omega$ und $R_2 = 10\,\Omega$?

Lösung

$$a = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{10\,\Omega}{100\,\Omega}\right) = 0{,}444\ \text{Np}$$

Beispiel

Wieder ist die Dämpfung, hier eines X-Gliedes mit $R_1 = 100\,\Omega$ und $R_2 = 10\,\Omega$, zu berechnen.

Lösung

$$a = \operatorname{arcosh} \frac{100\,\Omega + 10\,\Omega}{100\,\Omega - 10\,\Omega} = 0{,}655\ \text{Np}$$

3. Induktivität

3.1. Allgemeines

Induktiver Widerstand

$$|X_L| = 2\pi f L \quad \text{(Betrag)} \tag{3.1.}$$

oder in komplexer Schreibweise

$$X_L = j \cdot 2\pi f L. \tag{3.1.a}$$

Der Phasenwinkel beträgt bei der verlustlosen Induktivität 90°, d. h., der Strom eilt der Spannung um 90° nach.

Beachte

Für die Kreisfrequenz $2\pi f$ wird in der Elektrotechnik meist ω verwendet.

3.2. Induktivität eines gestreckten Leiters

Die Induktivität eines gestreckten Leiters mit der Länge l und dem Durchmesser d, beide in cm, errechnet sich zu

$$L = 2l \left[\ln \frac{4l}{d} - 1 + \alpha\right] \cdot 10^{-9}. \tag{3.2.}$$

Hierin ist α das Produkt der relativen Permeabilität des Leitermaterials (für nicht ferromagnetische Leiter ≈ 1) und dem Skineffekt-Korrekturglied aus Bild 3.1. Voraussetzung für die Gültigkeit von Gl. (3.2) ist, daß $l > 100$ d.

Beispiel

Die Induktivität für niedrige Frequenzen einer Kupferleitung von 100 m Länge und dem Durchmesser 3 mm ist zu berechnen.

Lösung

Nach Gl. (3.2.) ist

$$L = 2 \cdot 10^4\,\text{cm}\left[\ln \frac{4 \cdot 10^4\,\text{cm}}{0{,}3\,\text{cm}} - 1 + 0{,}2\right] \cdot 10^{-9} = 2{,}36 \cdot 10^{-4}\,\text{H}$$

$$= 0{,}236\,\text{mH}^*.$$

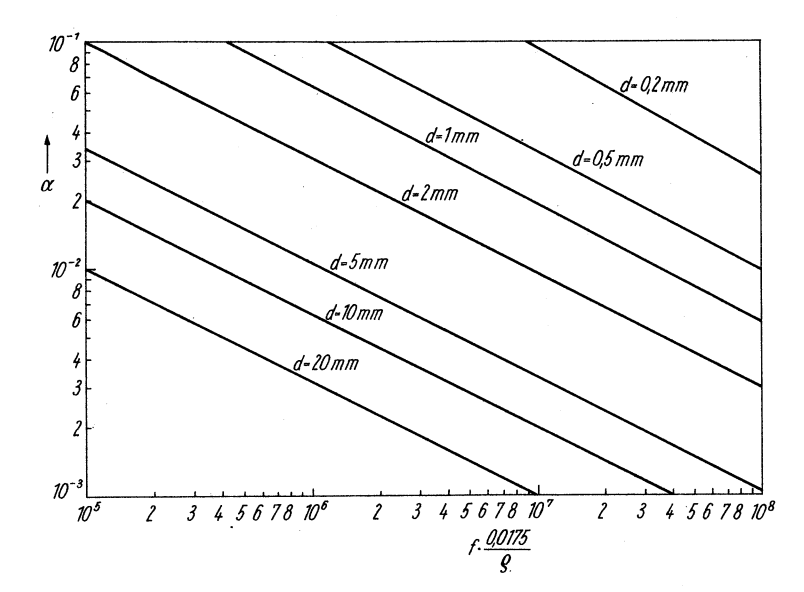


Bild 3.1 Korrekturglied für den Einfluß des Skineffektes in Abhängigkeit von $f \frac{0{,}0175}{\varrho}$, Durchmesser des Leiters d als Parameter

3.3. Induktivität einer Zylinderspule

Die Induktivität einer Zylinderspule ergibt sich zu

$$L = 0{,}985 \frac{n^2 d^2}{l} \cdot 10^{-8}*; \tag{3.3.}$$

n – Windungszahl, l – Länge in cm (hier: der Spule, Bild 3.2), d – Durchmesser in cm.

Beispiel

Eine Zylinderspule mit 40 Windungen hat einen Durchmesser von 12 mm und die Länge 30 mm. Wie groß ist ihre Induktivität?

* Der scheinbare Widerspruch der Maßeinheiten erklärt sich dadurch, daß die Induktivität früher auch in cm ausgedrückt wurde (CGS-Maßsystem, 1 H = 10^9 cm). Die Maßeinheit cm für die Induktivität ist in der DDR nicht zulässig.

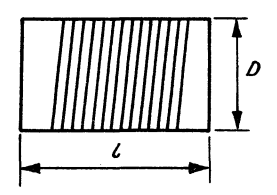


Bild 3.2
Ansicht einer Zylinderspule mit Maßbezeichnungen

Lösung

Nach Gl. (3.3.) ist

$$L = 0{,}985 \cdot \frac{40^2 \cdot 1{,}2^2\ \text{cm}^2}{3\ \text{cm}} \cdot 10^{-8} = 7{,}56 \cdot 10^{-6}\ \text{H} \quad \text{oder} \quad 7{,}56\ \mu\text{H}.$$

Selbstinduktion einer kurzen mehrlagigen Spule (Bild 3.3):

$$L = 2{,}1 n^2 r \left(\frac{r}{l + h}\right)^k \cdot 10^{-8}*; \qquad (3.4.)$$

n – Windungszahl, ohne Maßeinheit, r – (mittlerer) Spulenradius in cm, l – Spulenlänge in cm, h – Wickelhöhe in cm.

Der Exponent k ist 0,75, wenn $\frac{r}{l + h} < 1$ und 0,5, wenn $\frac{r}{l + h} \leqq 3$.

Beispiel

Die Induktivität einer kurzen mehrlagigen Spule ist zu berechnen. Bekannt sind $n = 400$, $r = 15$ mm, $l = 5$ mm und $h = 4$ mm.

Lösung

Mit der Nebenrechnung $\frac{r}{l + h} = \frac{15}{5 + 4} = 1{,}66$ ergibt sich, daß $k = 0{,}5$ ist. Folglich erhält man mit Gl. (3.4.):

$$L = 2{,}1 \cdot 400^2 \cdot 1{,}5 \cdot \left(\frac{15}{5 + 4}\right)^{0{,}5} \cdot 10^{-8} = 6{,}51 \cdot 10^{-3}\ \text{H} \quad \text{oder} \quad 6{,}51\ \text{mH}.$$

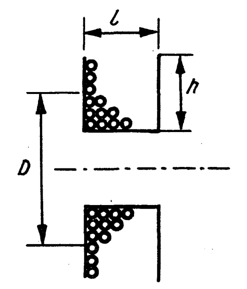


Bild 3.3
Schnitt durch eine mehrlagige kurze Zylinderspule mit Maßbezeichnungen

4. Kapazität

4.1. Allgemeines

Die Gleichung für den kapazitiven (Blind-)Widerstand eines Kondensators lautet:

$$|X_c| = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C} \tag{4.1.}$$

oder in komplexer Schreibweise

$$X_c = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}. \tag{4.1.a}$$

Der Phasenwinkel beträgt beim verlustlosen Kondensator −90°, d. h., der Strom eilt der Spannung um 90° voraus.

4.2. Kapazität eines Zweiplattenkondensators

Kapazität eines Zweiplattenkondensators (Bild 4.1) errechnet sich wie folgt:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}; \tag{4.2.}$$

ε_0 – Dielektrizitätskonstante des Vakuums $= 8{,}86 \cdot 10^{-14}$ F cm^{-1}, ε_r – Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums (s. Tabelle 4.1. auf S. 28), A – Fläche der leitenden Beläge, d – Abstand der leitenden Beläge, beide gemessen in cm bzw. cm^2.

Beispiel

Zwei Metallplatten sind durch eine Glimmerfolie ($\varepsilon_r = 8$) getrennt. Die Abmessungen der Platten betragen 30 cm × 40 cm, die Glimmerfolie hat eine Stärke von 1 mm. Wie groß ist die Kapazität der beiden Metallplatten gegeneinander?

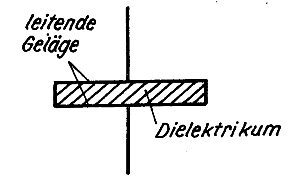


Bild 4.1
Schnitt durch einen Zweiplattenkondensator

Tabelle 4.1. Dielektrizitätskonstanten einiger Isolierstoffe

Werkstoff	relative Dielektrizitätskonstante
Porzellan	6
Steatit	6
Naturglimmer	4,7 ... 8,0
Quarz	4,4 ... 4,7
Glas	3,2 ... 5,0
Naturgummi	2,3 ... 2,8
Hartgummi	2,5 ... 4,0
Vulkanfiber	2,5
Preßspan	2,0
Hartpapierplatten	13
Trolitul	2,5
Calit	6,5
Lack (Drahtisolierung)	6,0
Marmor	4,0
Bakelit	2,2 ... 3,2
Schellack	1,1 ... 1,8
Parafin	0,96
Wasser (destilliert)	80
Pertinax	4 ... 6

Lösung

Nach Gl. (4.2.) ist

$$C = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{F\,cm^{-1}} \cdot 8 \cdot 30\,\mathrm{cm} \cdot 40\,\mathrm{cm}}{0{,}1\,\mathrm{cm}} = 8{,}51 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = 8{,}51\,\mathrm{nF}.$$

4.3. Kapazität eines Mehrplattenkondensators

Die Kapazität eines Kondensators mit sich kammartig gegenüberstehenden Platten (Bild 4.2) ergibt sich zu

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r (n - 1)\,A}{d}\,; \qquad (4.3.)$$

n – Anzahl der leitenden Platten; Bedeutung der anderen Symbole siehe Gl. (4.2.).

Beispiel

In einem Plattenkondensator ($\varepsilon_r = 5$) nach Bild 4.2 stehen sich 7 Platten gegenüber. Die Abmessungen der Platten sind 12 cm

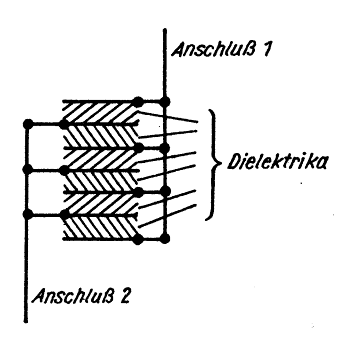


Bild 4.2
Schnitt durch einen Mehrplattenkondensator

× 12 cm, ihr Abstand beträgt je 2 mm. Wie groß ist die Kapazität der Anordnung?

Lösung

Nach Gl. (4.3.) ist

$$C = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{F\,cm^{-1}} \cdot 5 \cdot (7-1) \cdot 12\,\mathrm{cm} \cdot 12\,\mathrm{cm}}{0{,}2\,\mathrm{cm}} = 1{,}91 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$$

$$= 1{,}91\,\mathrm{nF}.$$

4.4. Kapazität eines Koaxialkabels oder koaxialen Zylinderkondensators

Die Kapazität des Koaxialkabels oder koaxialen Zylinderkondensators (Bild 4.3) errechnet sich zu

$$C = \frac{\varepsilon_r \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-13} \cdot l}{\lg \frac{D}{d}}; \qquad (4.4.)$$

l – Länge des Kabels (des Zylinderkondensators) in cm, D – Durchmesser des Außenleiters, d – Durchmesser des Innenleiters, beide in cm; Bedeutung der anderen Symbole siehe Gl. (4.2.).
In dem Faktor $2{,}4 \cdot 10^{-13}$ ist ε_0 bereits enthalten.

Beispiel

Ein Koaxialkabel hat einen Innenleiter von 1,5 mm Durchmesser und einen Durchmesser D (des Dielektrikums) von 8,8 mm, die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums beträgt 1,23. Wie groß ist die Kapazität je Meter Kabel?

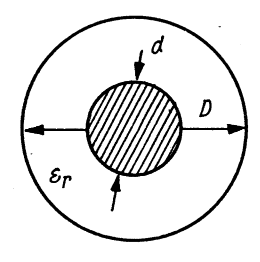


Bild 4.3
Schnitt durch ein Koaxialkabel

Lösung

Nach Gl. (4.4.) ergibt sich

$$C = \frac{1{,}23\ \mathrm{F\,cm^{-1}} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-13} \cdot 100\ \mathrm{cm}}{\lg \dfrac{0{,}88\ \mathrm{cm}}{0{,}15\ \mathrm{cm}}} = 3{,}84 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F}$$

oder 38,4 pF.

4.5. Kapazität einer Doppelleitung

Die Kapazität einer Doppelleitung (Bild 4.4) ergibt sich wie folgt:

$$C = \frac{\varepsilon_r l \cdot 10^{-12}}{8{,}3 \lg \left[\dfrac{a}{d} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{d}\right)^2 - 1}\right]}; \qquad (4.5.)$$

a – Abstand der Leiter, d – ihr Durchmesser, beide in cm; Bedeutung der anderen Symbole siehe Gl. (4.2.).
In den konstanten Faktoren ist wieder ε_0 enthalten.

Beispiel

Eine Doppelleitung hat zwei parallele Leiter mit je 0,9 mm Durchmesser, die voneinander 8,5 mm entfernt sind. Das Dielektrikum der Isoliermasse hat die Dielektrizitätskonstante 0,89. Wie groß ist die Kapazität der Leiter gegeneinander bei einer Leitungslänge von 4 m?

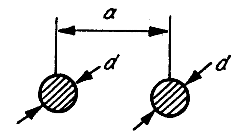


Bild 4.4
Schnitt durch eine Flachbandleitung

Lösung

$$C = \frac{0{,}89\ \mathrm{F\,cm^{-1}} \cdot 400\ \mathrm{cm} \cdot 10^{-12}}{8{,}3\ \lg\left[\frac{0{,}85\ \mathrm{cm}}{0{,}09\ \mathrm{cm}} + \sqrt{\left(\frac{0{,}85\ \mathrm{cm}}{0{,}09\ \mathrm{cm}}\right)^2 - 1}\right]} = 3{,}36 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F}$$

oder 33,6 pF

4.6. Kapazität eines Wickelkondensators

Die Kapazität eines Wickelkondensators (Bild 4.5) errechnet man wie folgt:

$$C = 0{,}555 \cdot \frac{\varepsilon_r l r}{d} \cdot 10^{-12}; \tag{4.6.}$$

l – Länge des Wickelkondensators, r – Radius des Wickelkondensators, d – Stärke des Dielektrikums, alles in cm; Bedeutung der anderen Symbole siehe Gl. (4.2.).
Wieder ist ε_0 bereits in der Gleichung enthalten.

Beispiel

Es soll die Kapazität eines Wickelkondensators berechnet werden. Bekannt sind: $\varepsilon_r = 2{,}5$; $l = 40$ mm; $d = 0{,}1$ mm; $r = 10$ mm.

Lösung

Nach Gl. (4.6.) ist

$$C = 0{,}555 \cdot \frac{2{,}5\ \mathrm{F\,cm^{-1}} \cdot 4\ \mathrm{cm} \cdot 1\ \mathrm{cm}}{0{,}01\ \mathrm{cm}} \cdot 10^{-12} = 5{,}55 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F}$$

oder 555 pF.

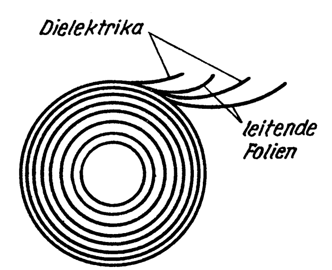


Bild 4.5
Schnitt durch einen Wickelkondensator

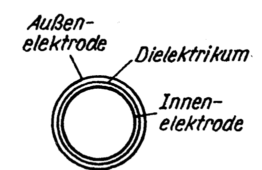


Bild 4.6
Schnitt durch einen Röhrchenkondensator

4.7. Kapazität eines Röhrchenkondensators

Die Kapazität eines Röhrchenkondensators (Bild 4.6) errechnet sich zu

$$C = 4\pi\varepsilon_r \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-14} r; \qquad (4.7.)$$

r – Radius des Röhrchens in cm; Bedeutung der anderen Symbole siehe Gl. (4.2.).

Beispiel

Gesucht wird die Kapazität eines Röhrchenkondensators mit $r = 5$ mm und $\varepsilon_r = 12$.

Lösung

Nach Gl. (4.7.) ist

$$C = 4\pi \cdot 12 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-14}\ \text{F cm}^{-1} \cdot 0{,}5\ \text{cm}$$
$$= 6{,}68 \cdot 10^{-12}\ \text{F} \quad \text{oder} \quad 6{,}68\ \text{pF}.$$

Bemerkung

Da die relative Dielektrizitätskonstante ohne Maßeinheit ist («relativ»), könnte die in Gl. (4.4.) bis Gl. (4.6.) in den Beispielen für ε_r eingesetzte Maßeinheit F cm^{-1} scheinbar falsch sein. Dabei muß man berücksichtigen, daß die Maßeinheit der absoluten Dielektrizitätskonstante $8{,}86 \cdot 10^{-14}$ F cm^{-1} in den Konstanten der Gleichungen «steckt».

4.8. Verlustfaktor eines Kondensators

Der Verlustfaktor eines Kondensators (Bild 4.7) wird wie folgt berechnet:

$$\tan\delta = \frac{1}{\omega C R} = \frac{1}{Q}; \qquad (4.8.)$$

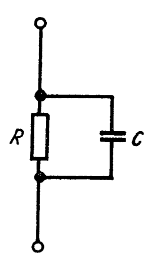


Bild 4.7
Verlustfaktor eines Kondensators, durch einen Parallelwiderstand R dargestellt

ω – wie allgemein üblich, die betrachtete Kreisfrequenz ($= 2\pi f$), R – parallel zum Kondensator liegender Verlustwiderstand, Q – Güte des Kondensators.
Bei den vorkommenden sehr kleinen Winkeln δ (im Bogenmaß!) ist es üblich, den Tangens δ durch δ selbst zu ersetzen. Es gilt dann

$$\tan\delta \approx \delta. \qquad (4.9.)$$

Beispiel

Ein Papierkondensator hat eine Kapazität von 1 µF und einen Isolierwiderstand von 1000 MΩ. Wie groß ist sein Verlustfaktor, wenn die Verluste sämtlich durch den Isolierwiderstand dargestellt werden ($f = 50$ Hz)?

Lösung

Nach Gl. (4.6.) ist

$$\tan\delta = \frac{1}{2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\,\text{AsV}^{-1} \cdot 10^{9}\,\text{VA}^{-1}} = 3{,}18 \cdot 10^{-6}$$

oder

$$\delta^{\frown} = \arctan\left(\frac{3{,}18 \cdot 10^{-6}\pi}{180}\right) = 3{,}18 \cdot 10^{-6}.$$

5. Komplexes Rechnen

5.1. Allgemeines

In der Elektrotechnik spielt das Rechnen mit komplexen Zahlen eine große Rolle. Induktive und kapazitive Blindwiderstände («Wechselstromwiderstände» von Induktivitäten und Kapazitäten) sind imaginäre Größen. Daraus ergibt sich, daß Netzwerke, die solche Bauelemente enthalten, komplexe Werte für Widerstände, Ströme und Spannungen aufweisen. Im folgenden sei an einige wichtige mathematische Zusammenhänge erinnert: Die Einheit der imaginären Zahlen i $\left(= \sqrt{-1}\right)$ bezeichnet man in der Elektrotechnik allgemein mit «j», da das Symbol i bereits oft für die Stromdichte (I/A) verwendet wird. Es gilt:

$$a + jb = c(\cos\varphi + j\sin\varphi) = ce^{j\varphi}, \qquad (5.1.)$$

wobei

$$c = a\cos\varphi = b\sin\varphi \quad \text{und}$$

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ist.

Im übrigen gelten uneingeschränkt die Regeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen.

5.2. Zweipole, Reihenschaltungen

Reihenschaltung von R und L (Bild 5.1):

$$Z = R + j\omega L, \qquad (5.2.)$$

$$\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}, \qquad (5.2.\text{a})$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \qquad (5.2.\text{b})$$

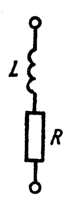


Bild 5.1
Serienschaltung von Widerstand R und Induktivität L

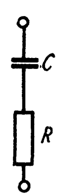


Bild 5.2
Serienschaltung von Widerstand R und Kapazität C

Reihenschaltung von R und C (Bild 5.2):

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}, \qquad (5.3.)$$

$$\varphi = -\text{arc tan}\,\frac{1}{R\omega C}, \qquad (5.3.a)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (5.3.b)$$

Reihenschaltung von R, L und C (Bild 5.3):

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \qquad (5.4.)$$

$$\varphi = \text{arc tan}\,\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \qquad (5.4.a)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (5.4.b)$$

[In Gl. (5.2.) bis Gl. (5.4.b)] ist ω die Kreisfrequenz, $= 2\pi f$.)

Beispiel

Eine Induktivität von 20 mH liegt in Reihe mit einem Widerstand von 5000 Ω. Wie groß ist der Scheinwiderstand Z dieser Reihenschaltung bei $f = 5$ kHz?

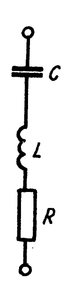


Bild 5.3
Serienschaltung von Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C

Lösung

Nach Gl. (5.2.) ist

$$Z = 5000\,\Omega + j\,2\pi \cdot 5 \cdot 10^3\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{VA^{-1}\,s}$$
$$= (5000 + j\,628)\,\Omega$$

oder

$$|Z| = \sqrt{(5000\ \mathrm{VA^{-1}})^2 + (628\ \mathrm{VA^{-1}})^2} = 5040\Omega$$

und

$$\varphi = \arctan \frac{628\ \mathrm{VA^{-1}}}{5000\ \mathrm{VA^{-1}}} = 7{,}16°,$$

folglich

$$Z = 5040\,\Omega \cdot e^{j7{,}16°}.$$

Beispiel

In einer Reihenschaltung von R, L und C sind $R = 50\ \Omega$, $L = 3$ H und $C = 5\ \mu$F. Bei Resonanz $\left(\omega L = \frac{1}{\omega C}\right)$ fließt ein Strom von 20 mA durch die Schaltung. Wie groß sind a) die Resonanzfrequenz und b) die bei dieser Frequenz an der Reihenschaltung wirkende Spannung?

Lösung

a) Bei Resonanz*) ist

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

oder, nach f aufgelöst,

$$f = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 LC}}$$

und mit den bekannten Werten

$$f = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 \cdot 3\ \mathrm{VA^{-1}\,s} \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{AV^{-1}\,s}}} = 41{,}1\ \mathrm{s^{1}} (= \mathrm{Hz}).$$

b) Bei Resonanz ist nur R in der Reihenschaltung wirksam. Es ergibt sich

$$U = IR = 20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} \cdot 50\ \mathrm{VA^{-1}} = 1\ \mathrm{V}.$$

* Siehe auch Abschnitt 5.7. Schwingkreise

Beispiel

In einer Reihenschaltung nach Bild 5.3 sind $R = 1\,370\,\Omega$, $L = 16{,}8\,\text{mH}$ und $C = 300\,\text{pF}$. Wie groß ist der Strom durch die Schaltung, wenn die Klemmenspannung 12,7 V und die Frequenz 85 kHz beträgt?

Lösung

Nach Gl. (5.4.) ist

$$Z = 1\,370\,\Omega + j\left(2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^4\,\text{s}^{-1} \cdot 16{,}8 \cdot 10^{-3}\,\Omega\text{s} - \frac{1}{2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^4\,\text{s}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-10}\,\Omega\text{s}}\right)$$
$$= 1\,370\,\Omega + j\,(8{,}97 \cdot 10^3 - 6{,}24 \cdot 10^3)\,\Omega$$
$$= (1\,370 + j\,2{,}73 \cdot 10^3)\,\Omega$$

oder

$$|Z| = \sqrt{1\,370^2 + 2\,730^2\,\Omega} = 3\,060\,\Omega$$

$$\varphi = \text{arc tan}\,\frac{2\,730}{1\,370} = 63{,}3°$$

$$Z = 3\,060 \cdot e^{j63{,}3°}$$

und schließlich, da $I = \dfrac{U}{Z}$,

$$I = \frac{12{,}7\,\text{V}}{3\,060\,\text{VA}^{-1} \cdot e^{j63{,}30°}} = 4{,}15 \cdot 10^{-3}\,\text{A}\,e^{-j63{,}3°}.$$

5.3. Zweipole, Parallelschaltungen

Parallelschaltung von R und L (Bild 5.4):

$$|Z| = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \tag{5.5.a}$$

$$\varphi = \text{arc tan}\,\frac{\omega L}{R}. \tag{5.5.b}$$

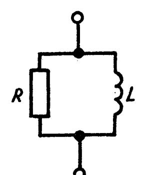


Bild 5.4
Parallelschaltung von Widerstand R und Induktivität L

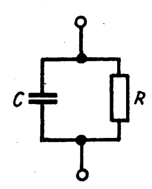


Bild 5.5
Parallelschaltung von Widerstand R und Kapazität C

Parallelschaltung von R und C (Bild 5.5):

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}}, \tag{5.6.a}$$

$$\varphi = -\text{arc tan } R\omega C. \tag{5.6.b}$$

Beachte

Bei Parallelschaltungen von Bauelementen ist unter Umständen vorzuziehen, an Stelle mit Widerständen besser mit Leitwerten (s. auch Abschnitt 1.,Widerstand und Leistung) zu rechnen. Für die Parallelschaltung von Induktivität und Widerstand gilt z. B.:

$$Y = \frac{1}{Z} = G - jB_L \tag{5.7.a}$$

und für die Parallelschaltung von Kapazität und Widerstand:

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB_C. \tag{5.7.b}$$

Bemerkenswert ist, daß jetzt die Blindleitwerte die entgegengesetzten Vorzeichen haben wie die entsprechenden Blindwiderstände:

$$X_L = j\omega L, \quad \text{aber} \quad B_L = -j\frac{1}{\omega L}$$

und

$$X_C = -j\frac{1}{\omega C}, \quad \text{aber} \quad B_C = j\omega C.$$

Parallelschaltung von R, L und C (Bild 5.6):

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}, \tag{5.8.a}$$

$$\varphi = \text{arc tan}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R. \tag{5.8.b}$$

Beispiel

Ein Widerstand von 25 kΩ liegt einem Kondensator von 46 pF parallel. Wie groß ist der Scheinwiderstand der Schaltung bei 100 kHz?

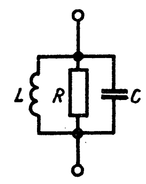


Bild 5.6
Parallelschaltung von Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C

Lösung

Nach Gl. (5.6.) ist

$$|Z| = \frac{2{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{VA^{-1}}}{\sqrt{1 + (2{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 2\pi \cdot 10^5\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 4{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{AV^{-1}\,s})^2}}$$
$$= 20260\,\mathrm{VA^{-1}}$$

und

$$\varphi = -\arctan 2\pi \cdot 10^5\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 2{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{AV^{-1}\,s}$$
$$= -35{,}85°,$$

folglich

$$Z = 20{,}26\,\mathrm{k\Omega}\,\mathrm{e}^{-j35{,}85°}.$$

Beispiel

Eine Spule von 1,5 mH liegt einem Widerstand von 12 kΩ parallel. Der Scheinwiderstand der Schaltung bei 15 MHz ist zu berechnen.

Lösung

Nach Gl. (5.5.) ist

$$|Z| = \frac{1{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{VA^{-1}\,s}}{\sqrt{(1{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{VA^{-1}})^2 + (2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{VA^{-1}\,s})^2}}$$
$$= 11960\,\mathrm{VA^{-1}},$$

$$\varphi = \arctan \frac{1{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{VA^{-1}}}{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{VA^{-1}\,s}} = 4{,}85°,$$

folglich

$$Z = 11{,}960\,\mathrm{k\Omega}\,\mathrm{e}^{j4{,}85°}.$$

Beispiel

Eine Spule von 20 mH liegt einem Kondensator von 500 pF und einem Widerstand von 5 kΩ parallel. Wie groß ist der Scheinwiderstand der Anordnung bei 20 kHz?

Lösung

Nach Gl. (5.8.) ist

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1})^2} + \left((2\pi \cdot 2 \cdot 10^4 \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-10}\ \text{AsV}^{-1} - \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^4\ \text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \text{VA}^{-1}\ \text{s}}\right)^2}} = 2560\ \text{VA}^{-1}$$

und

$$\varphi = \arctan\left(2\pi \cdot 2 \cdot 10^4\ \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-10}\ \text{AsV}^{-1} - \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^4\ \text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \text{VA}^{-1}\ \text{s}}\right) \cdot 5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1} = -59{,}17°,$$

folglich

$$Z = 2{,}56\ \text{k}\Omega\ \text{e}^{-j59{,}17°}.$$

5.4. Umwandlung von äquivalenten Schaltungen ineinander

Zwischen der Serien- und der Parallelschaltung komplexer Widerstände bestehen folgende Zusammenhänge (Bild 5.7): Um die Bauelemente der äquivalenten Parallelschaltung zu ermitteln

$$R_p = R_s\,(1 + Q^2), \tag{5.9.a}$$

$$X_p = \frac{R_p}{Q}, \tag{5.9.b}$$

$$Q = \frac{X_s}{R_s} \tag{5.9.c}$$

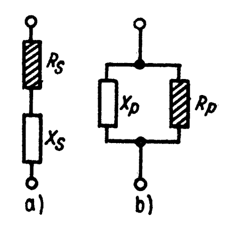


Bild 5.7
Serienschaltung (a) und Parallelschaltung (b) eines reellen Widerstandes R und eines Blindwiderstandes X

bzw. um die Bauelemente der äquivalenten Serienschaltung zu berechnen

$$R_s = \frac{R_p}{1 + Q^2}\,, \qquad (5.10.a)$$

$$X_s = Q R_s\,, \qquad (5.10.b)$$

$$Q = \frac{R_p}{X_p}\,. \qquad (5.10.c)$$

Die Serien- und Parallelschaltungen, die auf diese Weise zusammenhängen, heißen äquivalent. Man kann eine durch die andere ersetzen, ohne daß sich der durch die Schaltung fließende Strom bzw. sich die an der Schaltung abfallende Spannung ändert.

Diese Äquivalenz gilt nur für eine Frequenz!

In Gl. (5.9.) und Gl. (5.10.) bedeuten:

R – ohmscher Widerstand,
X – Betrag des Blindwiderstandes, also entweder $X_L = |\omega L|$ oder

$$X_C = \left|\frac{1}{\omega C}\right|.$$

Beispiel

Eine Serienschaltung eines (ohmschen) Widerstandes von 5 kΩ und eines Kondensators von 0,5 μF liegt an einer Spannung mit der Frequenz 1000 Hz. Wie groß sind die Bauelemente der äquivalenten Parallelschaltung?

Lösung.

Nach Gl. (5.9.c) ist

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{1}{2\pi 10^3\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 5 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{AsV^{-1}} \cdot 5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}} = 0{,}0637,$$

folglich

$$R_p = 5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}\,(1 + 0{,}0637^2) = 5020\,\Omega,$$

$$X_p = \frac{5020\,\Omega}{0{,}0637} = 78\,800\,\Omega;$$

bzw. nach Gl. (4.6.):

$$C_p = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 7{,}88 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}}} = 2{,}02 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{AsV^{-1}}$$

$$= 2{,}02\ \mathrm{nF}.$$

Beispiel

Durch eine Spule von 50 μH, der ein Widerstand von 1 kΩ parallelliegt, fließt ein Strom mit der Frequenz 30 MHz. Wie groß sind die Bauelemente der äquivalenten Serienschaltung?

Lösung

Nach Gl. (5.10.c) ist

$$Q = \frac{10^3 \text{ VA}^{-1}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ VsA}^{-1}} = 0{,}106,$$

folglich

$$R_s = \frac{10^3 \text{ VA}^{-1}}{1 + 0{,}106^2} = 989\,\Omega,$$

$$X_s = 0{,}106 \cdot 989\,\Omega = 105\,\Omega;$$

und nach Gl. (3.1.):

$$L_s = \frac{105 \text{ VA}^{-1}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}} = 5{,}57 \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1} = 55{,}7\,\mu\text{H}.$$

Beispiel

Wie lauten die Größen der Serienschaltung vorstehenden Beispiele bei $f = 100$ MHz?

Lösung

$$Q = \frac{10^3 \text{ VA}^{-1}}{2\pi \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ VsA}^{-1}} = 0{,}0318,$$

folglich

$$R_s = \frac{10^3 \text{ VA}^{-1}}{1 + 0{,}0318^2} = 999 \text{ VA}^{-1} \ (= \Omega),$$

$$X_s = 0{,}0318 \cdot 999 \text{ VA}^{-1} = 31{,}8 \text{ VA}^{-1}$$

und

$$L_s = \frac{31{,}8 \text{ VA}^{-1}}{2\pi \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}} = 5{,}06 \cdot 10^{-8} \text{ VsA}^{-1} = 50{,}6\,\text{nH}.$$

5.5. RC-Glieder

Grenzfrequenz f_g (Abfall des Scheinwiderstandes auf $1/\sqrt{2}$) bei einem *RC*-Glied (Hoch- oder Tiefpaß, Bild 5.8):

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC}. \qquad (5.11.)$$

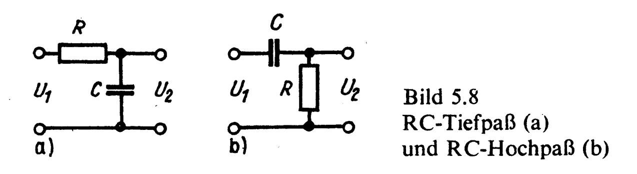


Bild 5.8
RC-Tiefpaß (a)
und RC-Hochpaß (b)

Bei ausreichendem Abstand von f_g(2,5 ... 4 bzw. 0,25 ... 0,4) erfolgt die Dämpfung in Abhängigkeit von der Frequenz kontinuierlich mit 6 dB/Oktave steigend (Tiefpaß) bzw. fallend (Hochpaß). Beim Hintereinanderschalten mehrerer gleichartiger *RC*-Filter addieren sich ihre Dämpfungen. Man erhält auf diese Weise Dämpfungen von 12 dB/Oktave (2 Glieder), 18 dB/Oktave (3 Glieder) usw. Nachteilig ist, daß dabei sich auch die Dämpfungen bei der Grenzfrequenz addieren: 6 dB bei 2 Gliedern, 9 dB bei 3 Gliedern usw. Bild 5.9 zeigt den Dämpfungsverlauf in Abhängigkeit von der Frequenz.

Beispiel

Ein *RC*-Filter für f_g = 18 kHz ist zu entwerfen, R = 100 kΩ.

Lösung

Gl. (5.11.), nach C aufgelöst, lautet

$$C = \frac{1}{2\pi R f_g} \tag{5.12.}$$

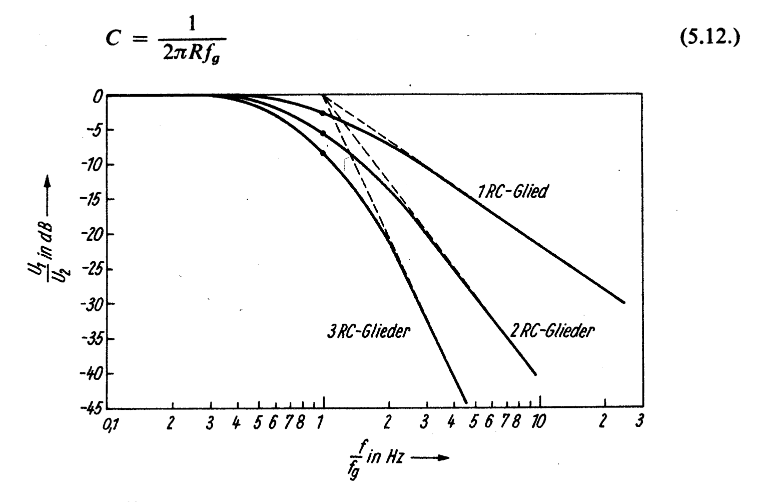


Bild 5.9 Übertragungsmaß $U_1 : U_2$ eines RC-Hochpasses in Abhängigkeit von der (genormten) Frequenz $f{:}f_g$

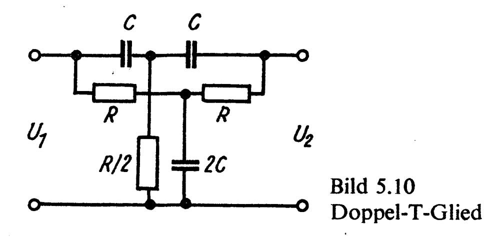


Bild 5.10
Doppel-T-Glied

und mit den bekannten Werten

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 10^5\ \mathrm{VA}^{-1} \cdot 1{,}8 \cdot 10^4\ \mathrm{s}^{-1}} = 8{,}84 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{AsV}^{-1}$$
$$= 88{,}4\ \mathrm{pF}.$$

Gl. (5.11.) gilt auch für aktive Filter, bei denen einfache *RC*-Glieder in der Gegenkopplung enthalten sind.

Doppel-*T*-Glied

Die Resonanzfrequenz f_0 des Doppel-*T*-Gliedes ist ebenfalls

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC.} \tag{5.13.}$$

Es ist üblich, den Kondensator im Querzweig zu $2C$ und den Wider-, stand im Querzweig zu $R/2$ zu wählen (Bild 5.10). Bei der Resonanzfrequenz weist das Doppel-*T*-Glied ein Dämpfungsmaximum auf.

Beispiel

Welche Resonanzfrequenz hat ein Doppel-*T*-Glied mit $R = 5\ \mathrm{k\Omega}$ und $C = 22\ \mathrm{nF}$?

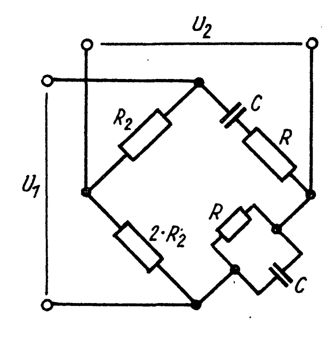


Bild 5.11
Wien-Robinson-Brücke

Lösung

Nach Gl. (5.13.) ist

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ VA}^{-1} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ AsV}^{-1}}$$
$$= 1\,447 \text{ s}^{-1} \; (= 1\,447 \text{ Hz}).$$

Ein entgegengesetztes Verhalten wie das Doppel-T-Glied weist die *Wien-Robinson*-Brücke (Bild 5.11) auf: Sie hat bei der Resonanzfrequenz – Berechnung wieder nach Gl. (5.13.) – ein Dämpfungs*minimum.*

Überbrücktes T-Glied (Bild 5.12):

Resonanzfrequenz f_0

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R \sqrt{C_1 C_2}} \, . \tag{5.14.}$$

Dämpfung b bei der Resonanzfrequenz

$$b = \frac{U_2}{U_1} = 1 + 0{,}5 \cdot \frac{C_2}{C_1} \, . \tag{5.15.}$$

Beispiel

Ein überbrücktes T-Glied für $f_0 = 1\,000$ Hz ist mit $R = 5$ kΩ zu berechnen (C_2 soll doppelt so groß wie C_1 sein).

Lösung

Gl. (5.14.) nach C_1 aufgelöst, C_2 durch $2C_1$ ersetzt

$$C_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\, R f_0} \tag{5.14.a}$$

sowie mit den bekannten Werten

$$C_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{2} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ VA}^{-1} \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}$$
$$= 2{,}25 \cdot 10^{-8} \text{ AsV}^{-1} = 22{,}5 \text{ nF}$$

und

$$C_2 = 2 \cdot 22{,}5 \text{ nF} = 45{,}0 \text{ nF}.$$

Gebräuchliche RC-Siebketten

a) 3gliedrige CR-Kette (Bild 5.13)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}\, RC} \tag{5.15.a}$$

$$\frac{U_2}{U_1} \approx 29 \tag{5.15.b}$$

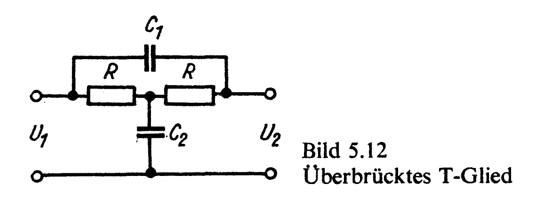


Bild 5.12
Überbrücktes T-Glied

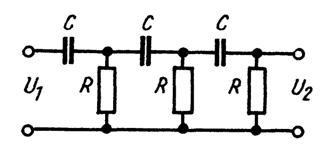


Bild 5.13
Dreifaches CR-Glied

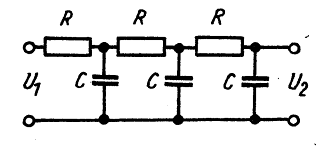


Bild 5.14
Dreifaches RC-Glied

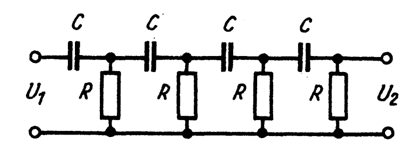


Bild 5.15
Vierfaches CR-Glied

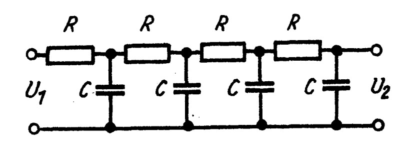


Bild 5.16
Vierfaches RC-Glied

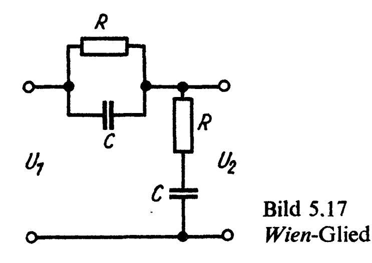


Bild 5.17
Wien-Glied

b) 3gliedrige *RC*-Kette (Bild 5.14)

$$f_0 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC} \tag{5.16.a}$$

$$\frac{U_2}{U_1} \approx 29 \tag{5.16.b}$$

c) 4gliedrige *CR*-Kette (Bild 5.15)

$$f_0 = \frac{\sqrt{0{,}7}}{2\pi RC} \tag{5.17.a}$$

$$\frac{U_2}{U_1} \approx 18{,}4 \tag{5.17.b}$$

d) 4gliedrige *RC*-Kette (Bild 5.16)

$$f_0 = \frac{1{,}2}{2\pi RC} \tag{5.18.a}$$

$$\frac{U_2}{U_1} \approx 18{,}4 \tag{5.18.b}$$

e) Wien-Brücke (Bild 5.17)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \tag{5.19.a}$$

Bei Gleichheit beider Widerstände ($R_1 = R_2$) und Kondensatoren ($C_1 = C_2$) ist

$$\frac{U_2}{U_1} = 3\,. \tag{5.19.b}$$

Anwendung finden die in Bild 5.13 bis Bild 5.17 gezeigten *RC*-Siebketten in Tonfrequenzgeneratoren.

Beispiel

Ein Tongenerator für $f_0 = 1$ kHz ist zu entwerfen. Wie groß müssen die Kondensatoren in Gl. (5.15.) bis Gl. (5.19.) sein, wenn R in allen Fällen $= 5\ \text{k}\Omega$ ist?

Lösung

Alle Bestimmungsgleichungen für f_0 werden nach C aufgelöst, und $R = 5\ \text{k}\Omega$ wird eingesetzt:

a) $$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{6} f_0 R} \tag{5.15.c}$$

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}\cdot 10^3\ \text{s}^{-1}\cdot 5\cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} \approx 1{,}3\cdot 10^{-8}\ \text{AsV}^{-1} = 13\ \text{nF}$$

b) $$C = \frac{\sqrt{6}}{2\pi f_0 R} \qquad (5.16.c)$$

$$C = \frac{\sqrt{6}}{2\pi \cdot 10^3\ \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{AsV}^{-1} = 78\ \text{nF}$$

c) $$C = \frac{\sqrt{0{,}7}}{2\pi f_0 R} \qquad (5.17.c)$$

$$C = \frac{\sqrt{0{,}7}}{2\pi \cdot 10^3\ \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} = 2{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{AsV}^{-1} = 26{,}6\ \text{nF}$$

d) $$C = \frac{1{,}2}{2\pi f_0 R} \qquad (5.18.c)$$

$$C = \frac{1{,}2}{2\pi \cdot 10^3\ \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} = 3{,}82 \cdot 10^{-8}\ \text{AsV}^{-1} = 38{,}2\ \text{nF}$$

e) $$C = \frac{1}{2\pi f_0 R} \qquad (5.19.c)$$

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3\ \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} = 3{,}18 \cdot 10^{-8}\ \text{AsV}^{-1} = 31{,}8\ \text{nF}$$

5.6. RC-Koppelglieder

Größe des Koppelkondensators

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{(AR)^2 - R^2} \cdot 2\pi f_u} \qquad (5.20.a)$$

bzw. Abfall $A = \frac{U_1}{U_2}$ (bei der unteren Übertragungsfrequenz)

$$A = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2\pi f_u C_k}\right)^2 + R_g^2}{R_g^2}}; \qquad (5.20.b)$$

R – Gitterableitwiderstand bzw. allgemein Eingangswiderstand der Folgestufe, U_1 – Ausgangsspannung der Quelle (= Eingangsspannung des Koppelgliedes), U_2 – Eingangsspannung der Stufe (= Aus-

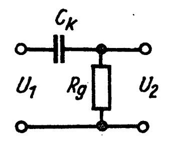


Bild 5.18
Frequenzabhängiges Glied für die untere Übertragungsfrequenz

gangsspannung des Koppelgliedes), f_u – die (betrachtete) unterste Übertragungsfrequenz.

Beispiel

Über einen Koppelkondensator von 10 µF wird eine Verstärkerstufe mit einem Eingangswiderstand von 5 kΩ angeschlossen. Wie groß ist der Abfall bei 60 Hz und 30 Hz gegenüber den mittleren Frequenzen?

Lösung

Nach Gl. (5.20.b) ist

$$A = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2\pi \cdot 60\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10^{-5}\,\mathrm{AsV}^{-1}}\right)^2 + (5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA}^{-1})^2}{(5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA}^{-1})^2}}$$
$$= 1{,}001\ (60\,\mathrm{Hz}).$$

und

$$A = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2\pi \cdot 30\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10^{-5}\,\mathrm{AsV}^{-1}}\right)^2 + (5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA}^{-1})^2}{(5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA}^{-1})^2}}$$
$$= 1{,}006\ (30\,\mathrm{Hz}).$$

Beispiel

In einem Verstärker darf im Koppelglied vor einer Stufe (R_g = 10 kΩ) ein Abfall von 2 dB bei der Frequenz 120 Hz (gegenüber mittleren Tonfrequenzen) auftreten. Wie groß muß der Koppelkondensator sein?

Lösung

Nebenrechnung: 2 dB entsprechen im linearen Maßstab (s. Seite 64 ff.):

$$A = \mathrm{Num}\,\frac{2}{20} = 1{,}26.$$

Damit ergibt sich durch Gl. (5.20.a) mit den bekannten Werten

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{(1{,}26 \cdot 10^4\,\mathrm{VA}^{-1})^2 - (10^4\,\mathrm{VA}^{-1})^2} \cdot 2\pi \cdot 120\,\mathrm{s}^{-1}}$$
$$= 1{,}73 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{As\,V}^{-1} = 173\,\mathrm{nF} \approx 0{,}18\,\mu\mathrm{F}.$$

Die Größe des Parallelkondensators (Bild 5.19) errechnet sich zu

$$C_p = \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{R_a \cdot 2\pi f_0} \qquad (5.21.a)$$

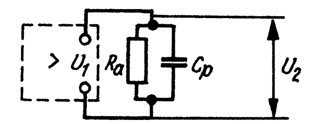


Bild 5.19
Frequenzabhängiges Glied für die obere Übertragungsfrequenz

bzw. die Größe des Verstärkungsabfalls (gegenüber der Bezugsfrequenz)

$$A = \sqrt{(C_p R_a \cdot 2\pi f_0)^2 + 1}\,. \tag{5.21.b}$$

In Gl. (5.21.) bedeuten außer den bereits bekannten Symbolen:
f_0 – die (betrachtete) oberste Übertragungsfrequenz und
R_a – die Größe des wirksamen Außenwiderstandes.

Beispiel

Wie groß ist der Verstärkungsabfall (gegenüber mittleren Frequenzen) bei einer Kapazität von 1 500 pF ($R_a = 10\,\mathrm{k\Omega}$) und einer Frequenz von 15 kHz?

Lösung

Nach Gl. (5.21.b) ist

$$A = \sqrt{(1{,}5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As\,V^{-1}} \cdot 10^4\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{s^{-1}})^2 + 1}$$
$$= 1{,}73$$

oder, nach Gl. (6.1.c) in dB,

$$b = 20 \lg 1{,}73 = 4{,}76\,\mathrm{dB}.$$

Beispiel

Wie groß darf der Parallelkondensator sein, der einen Verstärkerausgang belastet, wenn bei 10 kHz nur ein Abfall von $A = 1{,}6$ auftreten kann ($R_a = 5\,\mathrm{k\Omega}$)?

Lösung

Nach Gl. (5.21.a) ist

$$C_p = \frac{\sqrt{1{,}6^2 - 1}}{5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 2\pi \cdot 10^4\,\mathrm{s^{-1}}} = 3{,}98 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As\,V^{-1}}$$
$$= 3{,}98\,\mathrm{nF} \approx 4\,\mathrm{nF}.$$

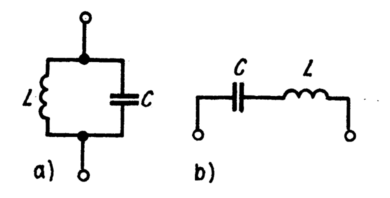


Bild 5.20
Verlustfreier Parallelschwingkreis (a) und verlustfreier Serienschwingkreis (b)

5.7. Schwingkreise

Die Resonanzfrequenz f_0 eines verlustfreien Schwingkreises – Bild 5.20 a oder b – errechnet sich wie folgt (*Thomson*sche Gleichung):

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \,. \tag{5.22.}$$

Bezüglich des Scheinwiderstandes der Serienschaltung (Reihenschaltung) von R, L und C siehe Gl. (5.4.) auf Seite 35.

Beispiel

Mit einem Kondensator von 450 pF ist ein Schwingkreis zu entwerfen, der bei f = 485 kHz Resonanz aufweist. Wie groß muß die Spule sein?

Lösung

Gl. (5.22.) wird nach L umgestellt

$$L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} \tag{5.22.a}$$

und mit den bekannten Werten ergibt sich dann

$$L = \frac{1}{(2\pi \cdot 4{,}85 \cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1})^2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{AsV}^{-1}} = 2{,}39 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{VsA}^{-1}$$
$$= 239\,\mu\mathrm{H}$$

Die Resonanzfrequenz eines verlustbehafteten Parallelresonanzkreises (Bild 5.20) ergibt sich zu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - r^2 \frac{C}{L}} \,. \tag{5.23.}$$

Bei $r = 0$ geht Gl. (5.23.) in Gl. (5.22.) über, d. h., es gilt die *Thomson*sche Gleichung. Nachbemerkung: Für alle praktischen Rechnungen liefert Gl. (5.22.) die Resonanzfrequenz mit genügender Genauigkeit! Dies geht unter anderem auch aus dem folgenden Beispiel hervor.

Beispiel

Ein verlustbehafteter Schwingkreis hat die Werte $L = 240\,\mu\text{H}$, $C = 510\,\text{pF}$, $r = 5{,}84\,\Omega$. Wie groß sind a) seine Resonanzfrequenz und b) die Resonanzfrequenz, wenn $r = 0$ wäre (verlustloser Schwingkreis)?

Lösung

Nach Gl. (5.23.) ist

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{VA}^{-1}\,\text{s} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{AsV}^{-1}}} \cdot \sqrt{1 - 5{,}84^2 \cdot \frac{5{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{AsV}^{-1}}{2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{VsA}^{-1}}}$$

$$= 4{,}549\,14 \cdot 10^5\,\text{s}^{-1} \cdot 0{,}999\,963 = 454{,}90\,\text{kHz}.$$

Man sieht, daß der zweite Teil der Gleichung den Einfluß der Dämpfung zusammenfaßt. Er ist 0,999963, also praktisch = 1. In Abweichung von den anderen Beispielen in dieser Broschüre wurde auf 6 Stellen genau gerechnet – mit der üblichen Genauigkeit (3 bzw. 4 Stellen) hätte sich der Einfluß der Dämpfung auf die Resonanzfrequenz nicht zeigen lassen!
Nachbemerkung: Die Resonanzfrequenz eines verlustbehafteten Serienschwingkreises, bei dem man sich den Verlustwiderstand parallel zur Induktivität denkt (Bild 5.21), ist in allen Fällen der Praxis identisch mit der Resonanzfrequenz des verlustlosen Resonanzkreises nach Gl. (5.22.)!
In Zusammenhang mit dem verlustbehafteten Resonanzkreis ist der Begriff der Güte Q bzw. des Dämpfungsfaktors d geläufig. Sie be-

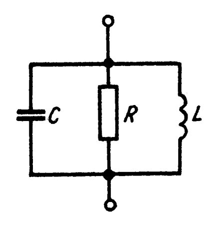


Bild 5.21
Verlustbehafteter Parallelschwingkreis, Verlustwiderstand R parallel zu L und C

rechnen sich zu

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{2\pi f_0 L}{r} . \qquad (5.24.)$$

Beispiel

Wie groß ist die Güte Q, bzw. welchen Wert hat der Dämpfungsfaktor d des im letzten Beispiel berechneten Schwingkreises?

Lösung

Nach Gl. (5.24.) ergibt sich

$$Q = \frac{2\pi \cdot 4{,}5490 \cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Vs\,A}^{-1}}{5{,}84\ \mathrm{VA}^{-1}} = 117$$

bzw.

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{1}{117} = 8{,}51 \cdot 10^{-3} .$$

Der Resonanzwiderstand eines verlustbehafteten Parallelresonanzkreises ist

$$R_0 = \frac{L}{Cr} . \qquad (5.25.)$$

Beispiel

Der Resonanzwiderstand des Schwingkreises in den letzten beiden Beispielen ist zu berechnen.

Lösung

Nach Gl. (5.25.) ergibt sich

$$R_0 = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{VsA}^{-1}}{5{,}1 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{AsV}^{-1} \cdot 5{,}84\ \mathrm{VA}^{-1}} = 8{,}058 \cdot 10^4\ \mathrm{VA}^{-1}$$

$$= 80{,}58\ \mathrm{k\Omega} .$$

In Zusammenhang mit Schwingkreisen gibt es auch die (absolute) Bandbreite b oder Δf, bei der der Resonanzwiderstand auf $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ von seinem Wert R_0 abgefallen ist. Diese Bandbreite errechnet sich zu

$$b_{0,7} = \Delta f = f_0 d = \frac{r}{2\pi L} . \qquad (5.26)$$

Beispiel

Wie groß ist die Bandbreite des berechneten Resonanzkreises?

Lösung

Nach Gl. (5.26.) ist

$$b_{0,7} = f_0 d = 4{,}5490 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1} \cdot 8{,}51 \cdot 10^{-3} = 3871\ \text{s}^{-1}\ (= \text{Hz})$$

oder

$$b_{0,7} = \frac{r}{2\pi L} = \frac{5{,}84\ \text{VA}^{-1}}{2\pi \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{Vs A}^{-1}} = 3873\ \text{s}^{-1}\ (= \text{Hz}).$$

Die Abweichung in der 4. Stelle rührt von der durch Auf- bzw. Abrundungen bedingten Ungenauigkeit her – bei der üblichen Rechengenauigkeit von drei Stellen wäre kein Unterschied sichtbar!
Ein weiterer Begriff, der in Zusammenhang mit Schwingkreisen verwendet wird, ist die Verstimmung. Man unterscheidet zwischen «einfacher Verstimmung x»

$$x = \frac{f}{f_0} \tag{5.27.}$$

und «Doppelverstimmung v»

$$v = \frac{f_1}{f_0} - \frac{f_0}{f_1} \quad \text{bzw.} \quad |v| \approx \frac{2\Delta f}{f_0}; \tag{5.28.}$$

f_1 – eine um $\pm \frac{\Delta f}{2}$ von der Resonanzfrequenz abweichende Frequenz, bei der der Resonanzwiderstand auf seinen 0,707fachen Wert abgefallen ist.

Beispiel

Die Verstimmung des berechneten Resonanzkreises ist zu ermitteln.

Lösung

$$x = \frac{3872\ \text{s}^{-1}}{4{,}5490 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1}} = 8{,}51 \cdot 10^{-3}$$

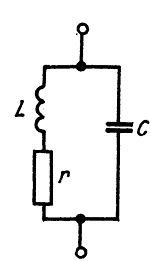


Bild 5.22
Verlustbehafteter Parallelschwingkreis, Verlustwiderstand r in Reihe mit der Induktivität L

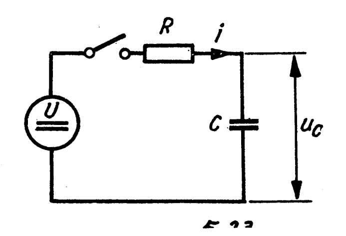


Bild 5.23
Aufladen (Einschalten) eines Kondensators

und, mit der Näherungsgleichung,

$$v = \frac{2 \cdot 3872\ \mathrm{s}^{-1}}{4{,}5490 \cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}017 \approx 2 \times 8{,}51 \cdot 10^{-3}.$$

Achtung! Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß in Zusammenhang mit dem verlustbehafteten Parallelschwingkreis r stets der Widerstand in Reihe mit der Induktivität ist (Bild 5.22), R hingegen stets den Widerstand parallel zur Induktivität (Bild 5.21) darstellt!

5.8. Schaltvorgänge bei RC-Gliedern

Aufladen eines Kondensators (Bild 5.23)*

$$i = \frac{U}{R}\, e^{\frac{-t}{T}}, \qquad (5.29.)$$

$$u_c = U\left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right); \qquad (5.30.)$$

i – Momentanwert des Stromes in den Kondensator («Ladestrom»), u_c – Spannung (Momentanwert) am Kondensator, U – Spannung am RC-Glied (s. Bild 5.21), R – Widerstand, durch den der Ladestrom fließt, t – Zeit (in s!) vom Zeitpunkt des Einschaltens gerechnet, T – sogenannte Zeitkonstante, die gleich dem Produkt RC ist.

Beispiel

Ein Kondensator von 16 μF wird an einer Gleichspannung $U = 250$ V über einen Widerstand $R = 1$ MΩ geladen. Wie groß sind Ladestrom i und Kondensatorspannung u_c nach 10 s, und wann ist der Ladevorgang beendet ($u_e = 0{,}99\,U$)?

* Statt von „Aufladen" kann man auch von „Einschalten" sprechen.

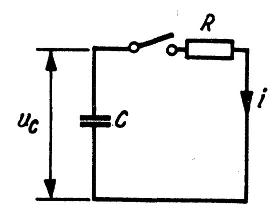


Bild 5.24
Entladen (Ausschalten) eines Kondensators

Lösung

Nebenrechnung: $T = RC = 10^6\ \text{V A}^{-1} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{AsV}^{-1} = 16\ \text{s}$.

a) Nach Gl. (5.29.) ist

$$i_c = \frac{250\ \text{V}}{10^6\ \text{VA}^{-1}}\ \text{e}^{\frac{-10\ \text{s}}{16\ \text{s}}} = 1{,}34 \cdot 10^{-4}\ \text{A} = 134\ \mu\text{A}.$$

b) Nach Gl. (5.30.) errechnet sich

$$u_c = 250\ \text{V}\left(1 - \text{e}^{\frac{-10\ \text{s}}{16\ \text{s}}}\right) = 116\ \text{V}.$$

c) Gl. (5.30.), nach t aufgelöst, ergibt

$$t = -T \ln\left(1 - \frac{u_c}{U}\right), \tag{5.30.a}$$

und mit den Werten aus dem Beispiel erhält man

$$t = -16\ \text{s} \ln (1 - 0{,}99) = 73{,}7\ \text{s}.$$

Das Entladen eines Kondensators (Bild 5.24) kann wie folgt berechnet werden:

$$i = -\frac{U}{R}\ \text{e}^{\frac{-t}{T}}, \tag{5.31.}$$

$$u_c = U\ \text{e}^{\frac{-t}{T}}; \tag{5.32.}$$

i – der Entladestrom, d. h. der Strom durch R.

Beispiel

Ein Kondensator von 20 µF wurde auf $U = 1000$ V geladen, er soll sich über einen Widerstand $R = 500$ kΩ entladen. Wie groß sind i bei $t = 0$ (also zu Beginn der Entladung) sowie die Spannung am Kondensator u_c nach 1 min, und wann hat sich der Kondensator so weit entladen, daß die Spannung an ihm auf 63 V abgesunken ist?

Lösung

Nebenrechnung: $T = RC = 5 \cdot 10^5\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AsV^{-1}} = 10\ \mathrm{s}$.

a) Nach Gl. (5.31.) ist

$$i = -\frac{1000\ \mathrm{V}}{5 \cdot 10^5\ \mathrm{VA^{-1}}}\mathrm{e}^{\frac{-0\ \mathrm{s}}{10\ \mathrm{s}}} = -2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} = -2\ \mathrm{mA}.$$

b) Nach Gl. (5.32.) errechnet sich

$$u_c = 1000\ \mathrm{V}\ \mathrm{e}^{\frac{-60\ \mathrm{s}}{10\ \mathrm{s}}} = 2{,}48\ \mathrm{V}.$$

c) Gl. (5.32.), nach t umgestellt, ergibt

$$t = -T \ln \frac{u_c}{U}, \qquad (5.32.a)$$

und mit den Werten des Beispiels erhält man

$$t = -10\ \mathrm{s} \ln \frac{63\ \mathrm{V}}{1000\ \mathrm{V}} = 27{,}6\ \mathrm{s}.$$

Nachstehend wird das Laden eines verlustbehafteten Kondensators (Bild 5.25) behandelt. Bisher ist der Kondensator als verlustfrei betrachtet worden. In Wirklichkeit hat er einen endlichen Isolationswiderstand, den man sich als Parallelwiderstand denken kann. Bezogen auf Bild 5.25, wird die Parallelschaltung von R_1 und R_2 mit R_p bezeichnet. Die Zeitkonstante ist nun R_pC. Es gilt dann

$$T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}, \qquad (5.33.)$$

$$i_c = \frac{U}{R_1}\mathrm{e}^{\frac{-t}{T}}, \qquad (5.34.)$$

$$u_c = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{T}}\right); \qquad (5.35.)$$

R_1 – Widerstand zwischen Gleichspannungsquelle und Kondensator (s. auch Bild 5.25), R_2 – Widerstand parallel zum Kondensator (Iso-

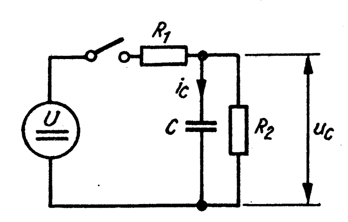


Bild 5.25
Aufladen (Einschalten) eines verlustbehafteten Kondensators

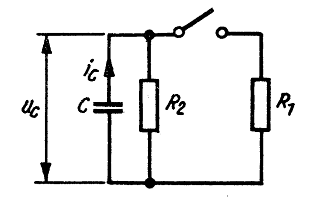


Bild 5.26
Entladen (Ausschalten) eines verlustbehafteten Kondensators

lationswiderstand), i_c – Ladestrom in den Kondensator, der nicht gleichzusetzen ist mit dem Strom durch R_1, u_c – Spannung am Kondensator. i_c und u_c sind Augenblickswerte.

Beispiel

Ein Kondensator von 500 μF hat einen Isolationswiderstand R_2 von 30 kΩ. Er wird über einen Widerstand R_1 von 5 kΩ an einer Gleichspannung U = 30 V aufgeladen. Wie groß sind die Ströme i_c und die Kondensatorspannung u_c nach 5 s?

Lösung

Nebenrechnung nach Gl. (5.33.):

$$T = \frac{5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \text{As V}^{-1}}{5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1} + 3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1}} = 2{,}14\ \text{s}.$$

Mit Gl. (5.34.) ist

$$i_c = \frac{30\ \text{V}}{5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}}\, e^{\frac{-5\,\text{s}}{2{,}14\,\text{s}}} = 5 \cdot 80 \cdot 10^{-4}\ \text{A} = 0{,}58\ \text{mA},$$

und mit Gl. (5.35.) ergibt sich

$$u_c = \frac{30\ \text{V} \cdot 3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1}}{5 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1} + 3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1}} \cdot \left(1 - e^{\frac{-5\,\text{s}}{2{,}14\,\text{s}}}\right) = 23{,}2\ \text{V}.$$

Bei der Entladung (Bild 5.26) liegen beide Widerstände (R_1 und R_2) parallel zum Kondensator. Mit $T = RC$ ist wieder

$$i_c = -\frac{U}{R_p}\, e^{\frac{-t}{T}}, \tag{5.36.}$$

$$u_c = U e^{\frac{-t}{T}}; \tag{5.37.}$$

i_c – Entladestrom des Kondensators, u_c – Spannung am Kondensator (i_c und u_c sind Momentanwerte), U – Spannung, auf die der Kondensator aufgeladen wurde.

Beispiel

Ein Kondensator von 20 μF mit einem Isolationswiderstand R_2 von $5 \cdot 10^9\ \Omega$ ist auf eine Spannung $U = 1000$ V aufgeladen, er entlädt sich (zusätzlich) über einen Widerstand R_1 von 50 kΩ. Wie groß sind nach 10 s die Spannung am Kondensator und der Entladestrom?

Lösung

Nebenrechnung:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 10^9\ \text{VA}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1}}{5 \cdot 10^9\ \text{VA}^{-1} + 5 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1}}$$

$$= 5{,}00 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1}\ (= \Omega),$$

$$T = R_p C = 5{,}00 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-5}\ \text{AsV}^{-1} = 1\ \text{s}.$$

Mit Gl. (5.37.) ist dann

$$u_c = 1000\ \text{V}\ \text{e}^{\frac{-10\ \text{s}}{1\ \text{s}}} = 0{,}0454\ \text{V} = 45{,}4\ \text{mV},$$

und mit Gl. (5.36.) ergibt sich

$$i_c = -\frac{1000\ \text{V}}{5{,}00 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1}}\ \text{e}^{\frac{-10\ \text{s}}{1\ \text{s}}} = -9{,}08 \cdot 10^{-7}\ \text{A} = -0{,}908 \mu\text{A}.$$

5.9. Schaltvorgänge bei LR-Gliedern

Beim Einschalten (Bild 5.27) sind

$$i = I\left(1 - \text{e}^{\frac{-t}{T}}\right), \qquad (5.38.)$$

$$u = U\text{e}^{\frac{-t}{T}}; \qquad (5.39.)$$

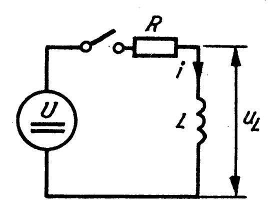


Bild 5.27
Einschalten einer Induktivität

i – Strom durch die Induktivität L (Augenblickswert), u_L – Spannung an der Induktivität L (Augenblickswert), $I = \frac{U}{R}$, d. h. Strom i nach unendlich langer Zeit, U – Spannung der Gleichstromquelle, T = Zeitkonstante, in diesem Fall L/R.

Beispiel

Eine Spule mit der Induktivität 5 H und einem (ohmschen) Widerstand von 2 Ω wird an eine Spannung von 6 V geschaltet. Wie groß ist der Strom i durch die Spule nach 0,5 s, und wann kann der Einschwingvorgang als beendet angesehen werden, d. h., wann beträgt i 99% von I?

Lösung

Nebenrechnung: $T = \frac{5\ \mathrm{VsA^{-1}}}{2\ \mathrm{VA^{-1}}} = 2{,}5\ \mathrm{s}$.

Nach Gl. (5.38.) ist

$$i = \frac{6\mathrm{V}}{2\mathrm{VA^{-1}}}\left(1 - e^{\frac{-0{,}5\,\mathrm{s}}{2{,}5\,\mathrm{s}}}\right) = 0{,}544\ \mathrm{A}.$$

Gl. (5.38.), nach t umgestellt, ergibt

$$t = -T \ln \frac{i}{I}, \qquad (5.38.a)$$

und mit den bekannten Werten erhält man

$$t = -2{,}5\ \mathrm{s} \ln 0{,}99 = 0{,}0251\ \mathrm{s} = 25{,}1\ \mathrm{ms}.$$

Beim Ausschalten ist (Bild 5.28)

$$i = I\,e^{\frac{-t}{T}}, \qquad (5.40.)$$

$$u = -U\,e^{\frac{-t}{T}} \qquad (5.41.)$$

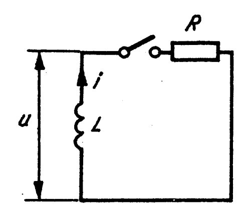


Bild 5.28
Kurzschließen über einen Widerstand einer Induktivität

i – Augenblickswert des Stromes durch L bzw. R, u – Augenblickswert der Spannung an L, I – Ergebnis aus U/R, U – Spannung der Gleichstromquelle.

Beispiel

Die Schaltung entsprechend dem letzten Beispiel ($R - 2\,\Omega$, $L = 5$ H, $U = 6$ V) wird abgeschaltet (Bild 5.28). Wie groß sind die Induktionsspannung u und der Strom i 1 s nach dem Abschalten?

Lösung

$$u = -6\,\text{V}\,\text{e}^{\frac{-1\,\text{s}}{2{,}5\,\text{s}}} = -4{,}02\,\text{V},$$

und nach Gl. (5.40.) ist

$$i = \frac{6\,\text{V}}{2\,\text{VA}^{-1}}\,\text{e}^{\frac{-1\,\text{s}}{2{,}5\,\text{s}}} = 2{,}01\,\text{A}.$$

6. Verschiedenes

6.1. Logarithmische Dämpfungsmaße

Unter Dämpfung eines Vierpols versteht man das Maß, um das eine Eingangsspannung bzw. der Eingangsstrom oder die Eingangsleistung in diesem Vierpol vermindert wird, die Ausgangsspannung oder der Ausgangsstrom bzw. die Ausgangsleistung ist um die Dämpfung geringer. Man kann diese Dämpfung einfach als Quotienten von Ausgangs- und Eingangsgröße ausdrücken. Es ist dann

$$\text{Dämpfung } B_1 = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} \quad \text{bzw.} \quad B_2 = \frac{P_1}{P_2} \tag{6.1.}$$

(s. hierzu auch Bild 6.1).
Diese Dämpfung läßt sich auch (in der Nachrichtentechnik üblich) durch ein logarithmisches Verhältnismaß ausdrücken: Das Neper (Np) oder das Dezibel (dB). Es ist

$$\text{Dämpfung in Np } b_1 = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} \tag{6.1.a}$$

und für Leistungen

$$b_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \tag{6.1.b}$$

bzw.

$$\text{Dämpfung in dB } b_2 = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} \tag{6.1.c}$$

und für Leistungen

$$b_2 = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}\,. \tag{6.1.d}$$

Die Dämpfung in Np oder dB ist ohne Maßbezeichnung, man achte aber darauf, daß in Zähler und Nenner von Gl. (6.1.) immer die gleichen Maßbezeichnungen eingesetzt werden, nur auf diese Weise kürzen sie sich gegenseitig weg.

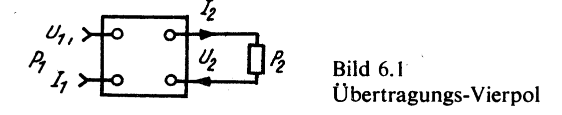


Bild 6.1
Übertragungs-Vierpol

Beispiel

Ein Dämpfungsglied erhält eine Eingangsspannung von 16,78 V, an seinem Ausgang erscheinen nur noch 45 mV. Wie groß ist die Dämpfung in linearem Maßstab und in dB?

Lösung

Nach Gl. (6.1.) ist

$$B_1 = \frac{16{,}78\ \mathrm{V}}{4{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{V}} = 373$$

und

$$b = 20\ \lg 373 = 51{,}4\ \mathrm{dB}.$$

Die Dämpfung ist das Gegenteil einer Verstärkung. Bei der Verstärkung werden in Gl. (6.1.) Zähler und Nenner vertauscht, d. h., es ist

$$v_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1} \text{ bzw. } \quad v_p = \frac{P_2}{P_1} \qquad (6.1.e)$$

oder (in Maß Np)

$$v = \ln \frac{U_2}{U_1} = \ln \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1}. \qquad (6.1.f)$$

Man kann die Dämpfung auch als «negative Verstärkung» auffassen. Dies ist nach dem Rechnen mit Logarithmen möglich und ergibt eine einfache Rechnung bei der Zusammenfassung von Dämpfungen und Verstärkungen.

Beispiel

In einer Übertragungsstrecke (Bild 6.2) sind folgende Übertragungsglieder angeordnet: ein Spannungsdämpfungsglied 10:1, ein Verstärker mit 13,5facher Spannungsverstärkung, ein Filter, das um den Faktor 54 dämpft, und ein Verstärker. Die Dämpfung durch Leitungsverluste beträgt 14 dB.
Wie groß muß die Verstärkung des letzten Verstärkers sein, damit die Ausgangsspannung der Übertragungsstrecke gleich ihrer Eingangsspannung ist?

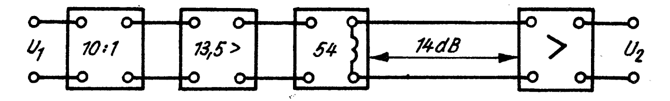


Bild 6.2 Übertragungsstrecke

Lösung

Die Dämpfung bzw. Verstärkung der einzelnen Glieder nach Gl. (6.1.) ist

$b_1 = 20 \lg \frac{10}{1} = 20$ dB für das Dämpfungsglied,
$v_1 = 20 \lg 13{,}5 = 22{,}6$ dB für den ersten Verstärker,
$b_2 = 54$ dB für das Filter (lt. Aufgabenstellung),
$b_3 = 14$ dB für die Dämpfung durch Leitungsverluste (lt. Aufgabenstellung).

Es ist nun das Gesamtübertragungsmaß die Summe der einzelnen Übertragungsmaße (in logarithmischen Verhältnismaßen), wobei die Dämpfungen als negative Größen zu zählen sind:

$$b_{ges} = -b_1 + v_1 + (-b_2) + (-b_3) + v_2$$

oder, da v_2 unbekannt ist (Aufgabenstellung),

$$v_2 = -b_1 + v_1 + (-b_2) + (-b_3)$$

und mit den bekannten Zahlenwerten

$$v_2 = -20\,\text{dB} + 22{,}6\,\text{dB} - (-54\,\text{dB}) + (-14\,\text{dB}) = -65{,}4\,\text{dB}.$$

Um den gleichen Betrag, d. h. um 65,4 dB, muß der Verstärker v_2 verstärken, damit die Dämpfungen der Übertragungsstrecke ausgeglichen werden.
Die umgekehrte Operation zum Logarithmieren ist das Suchen des Numerus (in einigen ausländischen Veröffentlichungen auch «Antilogarithmus» genannt).

Beispiel

Welchem Zahlenwert (Numerus) entspricht der (dekadische) Logarithmus lg 2?

Lösung

$$\lg 2 = 0{,}30103, \quad \text{folglich Num } 0{,}30103 = 2$$

Das führt zu neuen Gleichungen. Es ist nämlich bei Angaben von Nepern für Spannungen und Ströme

$$B_1 = \text{num } b_U \quad \text{oder} \quad B_1 = e^{b_U} \qquad (6.2.a)$$

und

$$B_2 = \text{num } b_P \cdot 2 \quad \text{oder} \quad B_2 = (e^{b_P})^2 \qquad (6.2.b)$$

für Leistungen. Entsprechend gilt für die Umrechnung von dB in Spannungs- und -stromverhältnisse

$$B_1 = \text{Num}\,(b_u:20) \qquad (6.2.c)$$

und für die Umrechnung in Leistungsverhältnisse

$$B_2 = \text{Num}\,(b_P:10). \qquad (6.2.d)$$

Achtung! Um Verwechslungen vorzubeugen, ist die «umgekehrte» Operation zum natürlichen Logarithmus (e) mit num (kleine Buchstaben) bezeichnet, die zum Briggschen oder dekadischen Logarithmus mit Num (Versalie als erster Buchstabe). Diese Regelung ist aber nicht allgemein üblich, darum Vorsicht!

Beispiel

Welcher Spannungsdämpfung entspricht das Maß 3 Np?

Lösung

Es ist

$$B_1 = \text{num}\,3\,\text{Np} = e^3 = 20{,}1\,.$$

Beispiel

Welcher Leistungsdämpfung entspricht diese Spannungsdämpfung (3 Np)?

Lösung

$$B_2 = \text{num}\,(2\cdot 3\,\text{Np}) = 403$$

Beweis

Da B_2 das Quadrat von B_1 sein muß, ist

$$20{,}1^2 = 404{,}01 \approx 403\,.$$

Beispiel

Das Maß 24 dB ist für Spannungen und Leistungen in linearem Maßstab umzurechnen.

Lösung

a) $$B_1 = \text{Num}\,\frac{24\,\text{dB}}{20} = 15{,}8$$

b) $$B_2 = \text{Num}\,\frac{24\,\text{dB}}{10} = 251$$

Beweis

$$15{,}8^2 = 250 \approx 251$$

Zu den verwendeten Symbolen ist noch zu erklären, daß der Index u auf eine Spannungsdämpfung (Stromdämpfung) oder Spannungsverstärkung (Stromverstärkung) hinweist, der Index P auf eine Leistungsdämpfung bzw. Leistungsverstärkung.
Wichtig sind auch die Umrechnungsfaktoren von Dezibel in Neper und umgekehrt. Es ist

$$1\ \text{dB} \triangleq 0{,}115129255\ \text{Np} \approx 0{,}115\ \text{Np} \qquad (6.3.a)$$

und

$$1\ \text{Np} \triangleq 8{,}685889611\ \text{dB} \approx 8{,}69\ \text{dB}. \qquad (6.3.b)$$

Beispiel

Wieviel dB entsprechen 0,7 Np, 4,6 Np und 7,2 Np?

Lösung

$$0{,}7\ \text{Np} \cdot 8{,}69 = 6{,}083\ \text{dB} \approx 6\ \text{dB}\ (1:2)$$
$$4{,}6\ \text{Np} \cdot 8{,}69 \approx 40\ \text{dB}\ (1:100)$$
$$7{,}2\ \text{Np} \cdot 8{,}69 = 62{,}6\ \text{dB}$$

In der Praxis genügt es immer, dB-Werte bis höchstens 1 Stelle hinter dem Komma zu runden, Np-Werte auf 2 Stellen hinter dem Komma.

Beispiel

Wieviel Neper entsprechen 20, 32 und 55 dB?

Lösung

$$20\ \text{dB} \cdot 0{,}115 = 2{,}3\ \text{Np}$$
$$32\ \text{dB} \cdot 0{,}115 = 3{,}68\ \text{Np}$$
$$55\ \text{dB} \cdot 0{,}115 = 6{,}32\ \text{Np}$$

6.2. Absolute Pegelangabe in Neper und Dezibel

Da das Rechnen mit den logarithmischen Verhältnismaßen Np und dB in vieler Hinsicht bequem ist, liegt es nahe, auch Spannungs-, Strom- und Leistungswerte mit ihnen auszudrücken. Np und dB sind aber Verhältnismaße, d. h., sie drücken das Verhältnis zweier Größen

aus, ohne Berücksichtigung der absoluten Größe selbst. Will man absolute Größen mit ihnen ausdrücken, so muß man einen Bezugswert haben, mit dem die jeweilige unbekannte Größe verglichen wird. Die Fernsprechtechnik – sie führte zuerst das Neper ein – legte einen noch heute gültigen Bezugswert fest: Ein Generator mit dem Pegel 0 Np gibt eine Leistung von 1 mW an einen Widerstand von 600 Ω ab. Daraus ergeben sich die «Null-Np-Pegel»:

Nach Gl. (1.7.c)

$$U_0 = \sqrt{10^{-3}\ \text{VA} \cdot 600\ \text{VA}^{-1}} = 0{,}7745966692\ \text{V} \approx 0{,}775\ \text{V},$$

nach Gl. (1.7.b)

$$I_0 = \sqrt{\frac{10^{-3}\ \text{VA}}{600\ \text{VA}^{-1}}} = 1{,}290994448 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \approx 1{,}29\ \text{mA}$$

und, wie bereits erklärt,

$$P_0 = 1\ \text{mW}.$$

Eine beliebige Spannung U_1 kann folgendermaßen als logarithmisches Verhältnismaß U^x ausgedrückt werden:

$$U^x = \ln \frac{U_1}{0{,}775\ \text{V}} \tag{6.4.}$$

bzw.

$$I^x = \ln \frac{I_1}{1{,}29\ \text{mA}} \tag{6.5.}$$

und

$$P^x = \left(0.5 \ln \frac{P_1}{1\ \text{mW}}\right). \tag{6.6.}$$

Beispiel

Wie groß ist die Spannung 1,55 V als logarithmisches Verhältnismaß?

Lösung

$$U^x = \ln \frac{1{,}55\ \text{V}}{0{,}775\ \text{V}} = 0{,}693\ \text{Np}$$

Beispiel

Welchem logarithmischen Verhältnismaß entspricht die Leistung 50 mW?

Lösung

$$P^x = \left(0{,}5 \ln \frac{50\ \text{mW}}{1\ \text{mW}}\right) = 1{,}96\ \text{Np}$$

Auch der umgekehrte Vorgang soll betrachtet werden, d. h. das Aufsuchen des Numerus bzw. e^x, wenn das logarithmische Verhältnismaß gegeben ist und der absolute Spannungs-, Strom- oder Leistungswert gesucht wird.
Es ist

$$U_1 = \text{num } U^x \cdot 0{,}775 \text{ V} = e^{U x} \cdot 0{,}775 \text{ V}, \qquad (6.7.)$$

bzw.

$$I_1 = \text{num } I^x \cdot 1{,}29 \text{ mA} = e^{I x} \cdot 1{,}29 \text{ mA}, \qquad (6.8.)$$

bzw.

$$P_1 = \text{num } 2 \cdot P^x \cdot 1 \text{ mW} = e^{2 \cdot P x} \cdot 1 \text{ mW}. \qquad (6.9.)$$

Beispiel

Wievel Volt bzw. Millivolt entsprechen einem Pegel von $-3{,}1$ Np?

Lösung

$$U_1 = (\text{num } -3{,}1 \text{ Np})\, 0{,}775 \text{ V} = 34{,}9 \text{ mV}$$

Beispiel

Wie groß in W (mW) ist der Pegel -4 Np?

Lösung

$$P_1 = \text{num } 2\,(-4) \text{ Np} \cdot 1 \text{ mW} = 3{,}35 \cdot 10^{-7} \text{ W} = 0{,}335\ \mu\text{W}$$

Für die Festlegung eines 0-dB-Pegels fehlt eine internationale Vereinbarung. Üblich in der Studiotechnik ist es, die Werte des 0-Np-Pegels auch dem 0-dB-Pegel zugrunde zu legen. Es sind dann wieder $U_0 \approx 0{,}775$ V; $I_0 \approx 1{,}29$ mA; $P_0 = 1$ mW. Die Berechnung erfolgt wieder nach Gl. (6.1.) und Gl. (6.2.).

Beispiel

1. Wieviel V ist -52 dB?

Lösung

$$U = \text{Num } \frac{-52 \text{ dB}}{20} \cdot 0{,}775 \text{ V} = 1{,}95 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 1{,}95 \text{ mV}$$

Beispiel

Wieviel A ist -21 dB?

Lösung

$$I = \text{Num } \frac{-21 \text{ dB}}{20} \cdot 1{,}29 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1{,}15 \cdot 10^{-4} \text{ A} = 0{,}115 \text{ mA}$$

Beispiel

Welcher Leistung in dB entspricht 1 μW?

Lösung

$$P = 10 \lg \frac{10^{-6}\,\text{VA}}{10^{-3}\,\text{VA}} = -30\,\text{dB}$$

(S. hierzu die Bemerkung zu der Aufgabe mit Leistungsangabe in Np.) Wichtiger als die dB-Pegel in der Studiotechnik sind die Empfindlichkeitsangaben für Rundfunk- und Fernsehempfänger gemäß *TGL 200-7041*, verbindlich für die DDR (aber nur hier).
Hierbei geht man von folgendem 0-dB-Pegel aus:
1 V bei Angabe der Empfindlichkeit in den AM-Bereichen (K, M, L),
1 V/m bei Angabe der Empfindlichkeit in den AM-Bereichen (K, M, L) mit einer Ferrit- oder Stabantenne (Feldstärke),
1 mW bei Angabe der Empfindlichkeit im FM-Bereich (UKW) für Rundfunkempfänger und für Fernsehempfänger. Bei dieser Leistungsangabe muß der Eingangswiderstand angegeben werden, auf den sich diese Eingangsleistung bezieht.

Beispiel

Für einen Portable-Rundfunkempfänger gibt der Hersteller als Empfindlichkeit 630 μV/m im MW-Bereich und 250 μV/m im KW-Bereich an. Wieviel dB entsprechen diese Werte?

Lösung

a) $$U = 20 \lg \frac{6{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{V/m}}{1\,\text{V/m}} = -64\,\text{dB}$$

b) $$U = 20 \lg \frac{2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{V/m}}{1\,\text{V/m}} = -72\,\text{dB}$$

Beispiel

Die Empfindlichkeit eines UKW-Rundfunkempfängers wird mit 3,0 μV an 60 Ω angegeben. Welcher Größe in dB entspricht das?

Lösung

Eine Spannung von 3,0 μV an 60 Ω entspricht einer Leistung von

$$P = \frac{(3{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{V})^2}{60\,\text{VA}^{-1}} = 1{,}5 \cdot 10^{-13}\,\text{VA},$$

$$P_{\text{dB}} = 10 \lg \frac{1{,}5 \cdot 10^{-13}\,\text{VA}}{10^{-3}\,\text{VA}} = -98{,}2\,\text{dB}.$$

Daneben findet der Leser in der Literatur noch verschiedene andere Angaben über den 0-dB-Pegel. Verbreitet ist unter anderem in US-amerikanischen Geräten $P_0 = 6$ mW an 500 Ω, was den Spannungsnullpegel $U_0 = 1{,}73$ V und den Stromnullpegel $I_0 = 3{,}46$ mA bedingt. Es ist folglich ratsam, sich bei Pegelangaben in dB zu fragen, auf welchen 0-Pegel sie sich beziehen.
Achtung! Damit die Empfindlichkeitsangaben nach *TGL 200-7041* eindeutig sind, gibt man meist hinter dem dB-Wert durch einen in Klammern gesetzten Zusatz (V), (V/m) oder (mW) an, auf welchen 0-dB-Pegel sich die betreffende Angabe bezieht.

Beispiel

Für einen Fernsehempfänger werden vom Herstellerwerk folgende Angaben für die Empfindlichkeit gemacht: rauschbegrenzte Empfindlichkeit im Band I = −78,4 dB (V), im Band III = −76,5 dB (V), im Band IV = −86,0 dB (V). Welchen Spannungen entsprechen diese Werte?

Lösung

Im Band I

$$-U = 1\ \text{V/m}\left(\text{Num}\,\frac{-78{,}4\ \text{dB}}{20}\right) = 1{,}20\cdot 10^{-4}\ \text{V} = 120\ \mu\text{V},$$

im Band III

$$-U = 1\ \text{V/m}\left(\text{Num}\,\frac{-76{,}5\ \text{dB}}{20}\right) = 1{,}50\cdot 10^{-4}\ \text{V} = 150\ \mu\text{V},$$

im Band IV

$$-U = 1\ \text{V/m}\left(\text{Num}\,\frac{-86{,}0\ \text{dB}}{20}\right) = 5{,}01\cdot 10^{-5}\ \text{V} = 50{,}1\ \mu\text{V}.$$

6.3. Kühlung von Halbleiterbauelementen

Da Halbleiterbauelemente im Gegensatz zu Elektronenröhren nur eine relativ geringe Übertemperatur annehmen können, ohne zerstört zu werden, muß man oft (bei Leistungsbauelementen immer) darauf achten, daß die maximale Sperrschichttemperatur $\vartheta_{j\,\text{max}}$ nicht überschritten wird. Diese Temperatur wird in den Technischen Daten des Herstellers meist angegeben. Richtwerte sind: bei Germaniumbauelementen 75 ... 90 °C, bei Siliziumbauelementen 125 ... 175 °C. Die maximale Übertemperatur berechnet sich zu

$$\vartheta_{\ddot{u}\,\text{max}} = \vartheta_{j\,\text{max}} - \vartheta_a; \qquad (6.10.)$$

$\vartheta_{\ddot{u}\,max}$ – maximale Übertemperatur, $\vartheta_{j\,max}$ – maximale Sperrschichttemperatur, ϑ_a – Temperatur der Umgebung, Raumtemperatur (wenn das betreffende Bauelement nicht so montiert ist, daß es von einem anderen Bauelement «aufgeheizt» wird).
Für Bauelemente geringer Leistung (Anfangsverstärkertransistoren, Demodulations- und Schaltdioden usw.) ist die Berechnung, welche Leistung höchstens in ihnen umgesetzt werden darf, einfach. Es ergibt sich

$$P_{v\,max} = \frac{\vartheta_{j\,max} - \vartheta_a}{R_{thja}}; \qquad (6.11.)$$

R_{thja}* – Wärmewiderstand zwischen Sperrschicht und Umgebung. Er wird oft in den Technischen Daten des betreffenden Bauelementes genannt.

Beispiel

Für den Transistor *SC 237* gibt der Hersteller an, daß $\vartheta_{j\,max} = 125\ °C$ sein darf und daß $P_{v\,max}$ bei einer Umgebungstemperatur von 25 °C den Wert 200 mW nicht überschreiten darf. Wie groß ist der thermische Widerstand R_{thja}?

Lösung

Nach Gl. (6.11.) ist

$$R_{thja} = \frac{\vartheta_{j\,max} - \vartheta_a}{P_{v\,max}} \qquad (6.11.a)$$

und mit den bekannten Zahlenwerten

$$R_{thja} = \frac{125\ °C - 25\ °C}{200\ mW} = 0{,}5\ K/mW.$$

Man beachte, daß die Maßeinheit °C eine von bestimmten physikalischen Konstanten – Schmelz- und Siedetemperatur des Wassers – abhängige gerichtete Größe ist, die Maßeinheit K (Kelvin) – früher grd (Grad) – jedoch auch eine Temperaturdifferenz ist, ohne Berücksichtigung der absoluten Temperatur.

Beispiel

Für den älteren Germaniumtransistor *GC 121* wird vom Hersteller angegeben: $\vartheta_{j\,max} = 80\ °C$, $R_{thja} = 0{,}38\ K/mW$. Wie groß ist $P_{v\,max}$ bei $\vartheta_a = 25\ °C$?

* Wenn die Gefahr einer Verwechslung nicht besteht (bei Bauelementen kleiner Leistung), wird der Ausdruck R_{thja} oft durch R_{th} ersetzt.

Lösung

$$P_{v\max} = \frac{80\ °C - 25\ °C}{0{,}38\ K\ mW^{-1}} = 145\ mW$$

(Den gleichen Wert gibt der Hersteller an.)
In diesem Zusammenhang ein wichtiger Hinweis: Wie aus den bisherigen Ausführungen hervorgeht, bezieht sich die maximale Verlustleistung $P_{v\max}$ stets auf eine bestimmte Umgebungstemperatur ϑ_a. Gl. (6.10.) in Zusammenhang mit Gl. (6.11.) muß immer erfüllt sein: Andere Umgebungstemperaturen bedingen andere Übertemperaturen – die maximale Sperrschichttemperatur $\vartheta_{j\max}$ ist eine Bauelementekonstante und darf in keinem Fall überschritten werden.

Beispiel

Wie groß darf $P_{v\max}$ bei dem *GC 121* (im letzten Beispiel) sein, wenn die Umgebungstemperatur $\vartheta_a = 45\ °C$ ist?

Lösung

$$P_{v\max} = \frac{80\ °C - 45\ °C}{0{,}38\ K\ mW^{-1}} = 92{,}1\ mW$$

In der Praxis kann es vorkommen, daß von einem Bauelement die maximalen Verlustleistungen bei unterschiedlichen Umgebungstemperaturen bekannt sind, nicht aber der Wert des thermischen Widerstandes. Dieser muß dann berechnet werden:

$$R_{thja} = \frac{\vartheta_{a2} - \vartheta_{a1}}{P_{v1} - P_{v2}}; \qquad (6.12.)$$

ϑ_{a1} – Umgebungstemperatur im ersten Fall, ϑ_{a2} – Umgebungstemperatur im zweiten Fall. P_{v1} und P_{v2} sind die jeweiligen maximalen Verlustleistungen.

Beispiel

Von einem Transistor ist bekannt, daß seine maximal zulässige Verlustleistung bei 25 °C Umgebungstemperatur 200 mW betragen darf, bei 125 °C Umgebungstemperatur nur 50 mW. Wie groß ist R_{thja}?

Lösung

Es ist

$$R_{thja} = \frac{125\ °C - 25\ °C}{200\ mW - 50\ mW} = 0{,}667\ K/mW.$$

Bei Leistungshalbleiterbauelementen reicht im allgemeinen die Kühlung durch Konvektion nicht aus. Man muß die Bauelemente auf ein

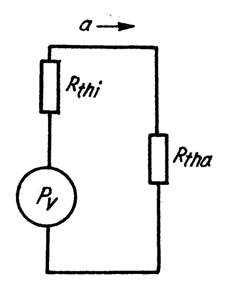


Bild 6.3
Thermische Ersatzschaltung eines Transistors

Kühlblech aufschrauben oder mit Kühlflügel versehen, um die Verlustwärme abzuführen. Zeichnet man analog zum elektrischen Grundstromkreis einen thermischen Grundstromkreis des Leistungsbauelementes (Bild 6.3), so erhält man einen inneren (R_{thi}) und einen äußeren (R_{tha}) Wärmewiderstand, die beide in Reihe liegen und vom Wärmestrom Q (Maßeinheit: J/s) durchflossen werden. Während nun der innere Wärmewiderstand R_{thi} durch die Konstruktion des Leistungshalbleiterbauelementes und durch die Eigenschaften seiner Werkstoffe festliegt, läßt sich vom «Anwender» des Bauelementes durch sinnvolle Gestaltung der Kühlanordnung der Widerstand R_{tha} klein halten. Die maximal zulässige Verlustleistung des Bauelementes ist

$$P_{v\max} = \frac{\vartheta_{j\max} - \vartheta_a}{R_{thi} + R_{tha}} \qquad (6.13.)$$

oder, wenn man die Wärmewiderstände weiter «aufspaltet»,

$$P_{v\max} = \frac{\vartheta_{j\max} - \vartheta_a}{R_{thjC} + R_{tht} + R_{this} + R_{thk}}; \qquad (6.13.a)$$

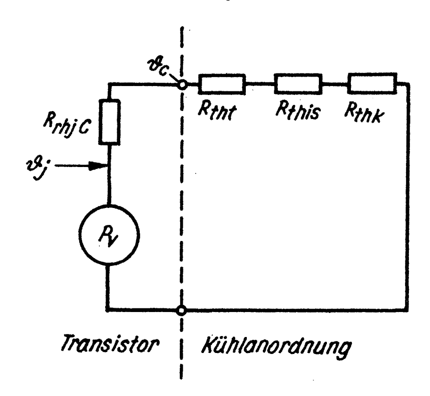


Bild 6.4
Ausführliche thermische Ersatzschaltung eines Leistungsverstärkertransistors

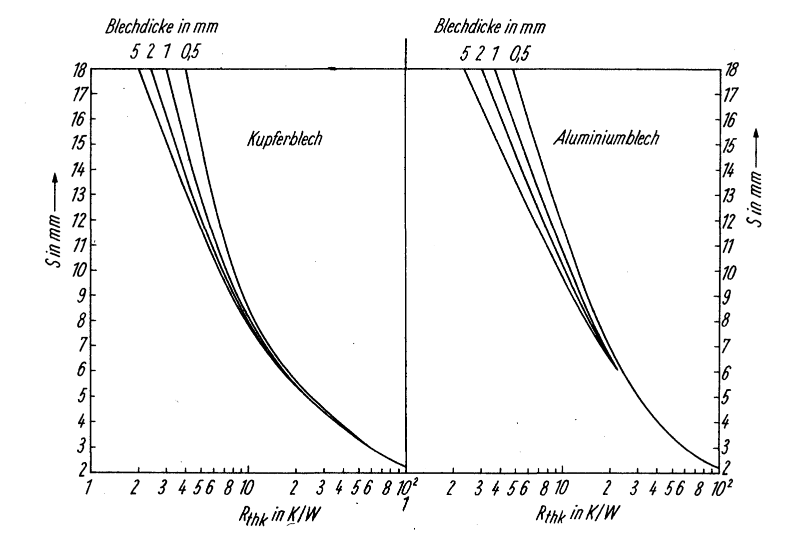


Bild 6.5 R_{thk} eines quadratischen Kupferbleches in Abhängigkeit von seiner Kantenlänge S, Blechdicke als Parameter

Bild 6.6 R_{thk} eines quadratischen Aluminiumbleches in Abhängigkeit von seiner Kantenlänge S, Blechdicke als Parameter

R_{thjC} – Wärmewiderstand zwischen Sperrschicht und Gehäuse, R_{tht} – Wärmeübergangswiderstand zwischen Gehäuse und Kühlvorrichtung, R_{this} – Wärmewiderstand einer Isolierzwischenlage, R_{thk} – innerer Wärmewiderstand der Kühlvorrichtung.
Bild 6.4 zeigt die Erweiterung der Schaltung nach Bild 6.3 mit den einzelnen Bestandteilen der Wärmewiderstände, Tabelle 6.1. bis 6.3. sowie Bild 6.5 und Bild 6.6 geben Auskunft über die Werte einiger Kühlvorrichtungen bzw. ihrer Bestandteile. Die aus ihnen gewonnenen

Tabelle 6.1. Richtwerte für R_{tht} bei verschiedenen Montagebedingungen

R_{tht} in K/W	Montagebedingung
0,7	Kühlvorrichtung, eloxiert
0,5	Kühlvorrichtung, unbearbeitet
0,3	Kühlvorrichtung, eloxiert, mit Paste
0,2	Kühlvorrichtung, blank, mit Paste

Tabelle 6.2. Richtwerte für R_{this}

R_{this} in K/W	Isolierzwischenlage
1,2	Glimmerscheibe, Dicke 50 µm
1,4	Glimmerscheibe, Dicke 100 µm
1,0	Hartpapierscheibe, Dicke 100 µm
0,6	Glimmerscheibe, Dicke 100 µm, beiderseitig mit Silikonfett bestrichen

Tabelle 6.3. Faktoren für R_{tht} bei einigen Kühlblechen

Faktor $k \cdot R_{tht}$	Kühlblechart
1,0	senkrechte Kühlbleche
1,15	waagerechte Kühlbleche
1,0	blanke Kühlblechoberfläche
0,85	mattschwarze Kühlblechoberfläche

Werte resultieren aus vielen langjährigen Erfahrungen der Praxis und können streuen!

Beispiel

Wie groß darf die maximale Verlustleistung (bei 25 °C Raumtemperatur) eines Thyristors *ST 121/6* mit Kühlkörper *K 25 M 8* sein?

Lösung

Nach Herstellerangabe hat der Thyristor *ST 121/6* eine maximale Sperrschichttemperatur von 125 °C sowie einen inneren Wärmewiderstand (R_{thjc}) von 1,0 K/W und der Kühlkörper *K 25 M 8* einen (äußeren) Wärmewiderstand von 3,3 K/W. Nach Gl. (6.13.) ist

$$P_{v\,max} = \frac{125\ °C - 25\ °C}{3{,}3\ K/W + 1{,}0\ K/W} = 23{,}3\ W.$$

Beispiel

Wie groß darf die maximale Verlustleistung eines Germanium-Leistungstransistors *GD 241* sein, der, durch Lackpapier ($R_{this} = 1{,}2$ K/W) isoliert, auf einem 2 mm starken Aluminiumblech (blank, senkrecht montiert) angebracht ist? Die Raumtemperatur beträgt maximal 45 °C, $\vartheta_{j\,max} = 85$ °C, der Wärmeübergangswiderstand R_{tht} soll vernachlässigt werden.

Lösung

Vom *GD 241* ist bekannt, daß sein $R_{thJC} = 4{,}0$ K/W (früher: 4,0 grd/W) beträgt. Nach Bild 6.6 ist der Wärmewiderstand R_{thk} eines Aluminiumkühlbleches von 200 mm² Oberfläche bzw. einer Kantenlänge (bei Quadratischer Form) von 200 cm² ≈ 14,1 mm etwa 5,0 K/W. Damit wird nach Gl. (6.13.a)

$$P_{v\max} = \frac{85\,°\mathrm{C} - 45\,°\mathrm{C}}{4{,}0\,\mathrm{K/W} + 1{,}2\,\mathrm{K/W} + 5{,}0\,\mathrm{K/W}} = 3{,}92\,\mathrm{W}.$$

Man kann Gl. (6.13.a) auch so umstellen, daß sich R_{thk} ergibt, wenn $P_{v\max}$ bekannt ist. Damit läßt sich die Größe des erforderlichen Kühlbleches berechnen (besser: überschlagmäßig bestimmen), die notwendig ist, um die auftretende Verlustleistung abzuführen. Aber Achtung: Diese überschlagmäßige Bestimmung ist mit einem großen Unsicherheitsfaktor behaftet und gilt nur für die speziellen Verhältnisse, für die die betreffenden Gleichungen bzw. Tabellen und Diagramme aufgestellt worden sind!
Die Umstellung von Gl. (6.13.a) nach R_{thk} ergibt

$$R_{thk} = \frac{(\vartheta_{J\max} - \vartheta_a) - P_{v\max}\,(R_{thJC} + R_{tht} + R_{this})}{P_{v\max}}. \qquad (6.13.b)$$

Beispiel

Ein Silizium-Leistungstransistor soll mit einer maximalen Verlustleistung $P_{v\max} = 10$ W betrieben werden. Von ihm sind bekannt: $\vartheta_{J\max} = 155$ °C, $R_{thJC} = 1{,}5$ K/W. Die Montage erfolgt über eine Isolierscheibe ($R_{this} = 1{,}0$ K/W) auf einer senkrechten Aluminiumscheibe ($R_{tht} = 0{,}7$ K/W, Faktor $k = 1{,}0$, lt. Tabelle 6.3.). Die Raumtemperatur beträgt 40 °C. Wie groß muß die Kantenlänge des (quadratischen) Aluminiumbleches sein, um die Verlustleistung abzuführen?

Lösung

Nach Gl. (6.13.b) ist

$$R_{thk} = \frac{(155\,°\mathrm{C} - 40\,°\mathrm{C}) - 10\,\mathrm{W}\,(1{,}5\,\mathrm{K/W} + 0{,}7\,\mathrm{K/W} + 1{,}0\,\mathrm{K/W})}{10\,\mathrm{W}}$$

$$\doteq 8{,}3\,\mathrm{K/W^{-1}}.$$

Nach Bild 6.6 wird dieser Wert für R_{thk} mit Sicherheit erreicht durch ein Aluminium-Kühlblech von 2 mm Stärke und 10 mm Kantenlänge.

7. Transformatoren und Übertrager

7.1. Induktivität

Die Induktivität eines Übertragers berechnet sich (genau wie die Induktivität einer eisengefüllten Spule) zu

$$L_e = \frac{0{,}4\pi Q_{Fe}\mu_r n^2}{l_{Fe}} \cdot 10^{-8}; \qquad (7.1.)$$

L – Induktivität bei verschwindend kleiner Magnetisierung; im Fall einer nicht mehr verschwindend geringen Magnetisierung muß die relative Permeabilität μ_r bei der betreffenden Feldstärke in dem verwendeten Kernmaterial aus der B-H-Kurve (Magnetisierungskurve) ermittelt werden, $0{,}4\pi \cdot 10^{-8}$ – sogenannte Induktionskonstante $= 1{,}256 \cdot 10^{-8}$ mit der Maßeinheit $\mathrm{H\,cm^{-1}}$, Q_{Fe} – Eisenquerschnitt in $\mathrm{cm^2}$, μ_r – relative Permeabilität des verwendeten Kernmaterials (feldstärkeabhängig!), ohne Maßeinheit, n – Windungszahl, ohne Maßeinheit, l_{Fe} – Eisenweglänge in cm. Die Daten des Eisenkernes müssen bei unbekannten Übertrager- bzw. Transformatorkernen aus einer Tabelle (z. B. Tabelle 7.1. bis Tabelle 7.3.) gewonnen werden. Achtung! Bei Spulen, Übertragern und Transformatoren ist es (genau wie bei Kondensatoren) gebräuchlich, für Längen mit cm, für Flächen mit $\mathrm{cm^2}$ und für Volumen mit $\mathrm{cm^3}$ zu rechnen!

Beispiel

Die Induktivität L_0 eines Übertragers soll berechnet werden. Die Daten: $Q_{Fe} = 2{,}30\ \mathrm{cm^2}$, $l_{Fe} = 9{,}6\ \mathrm{cm}$, $n = 2600$, $\mu_r = 500$.

Lösung

Nach Gl. (7.1.) ist

$$L_0 = \frac{1{,}256 \cdot 10^{-8} \cdot \mathrm{Vs\,A^{-1}\,cm^{-1}} \cdot 2{,}30\ \mathrm{cm^2} \cdot 500 \cdot 2600^2}{9{,}6\ \mathrm{cm}}$$
$$= 10{,}2\ \mathrm{H}.$$

Vormagnetisierung eines (ferromagnetischen) Kernes:
Die Gleichfeldstärke im Kern ist

$$\mathrm{H} = \frac{In}{l_{Fe}}. \qquad (7.2.)$$

In dieser Gleichung wird das Produkt In gelegentlich zur «magnetischen Spannung» zusammengefaßt. I ist der (Gleich-)Strom durch die Wicklung.

Tabelle 7.1. Daten von Übertragungskernen (M-Schnitte) siehe Bild 7.1

		M 20/5	M 30/7	M 30/10	M 42/15	M 55/20
Kantenlänge *a*	mm	20	30	30	42	55
Schichthöhe	mm	5	7	10	15	20
effektiver Eisenquerschnitt Q_{Fe}	cm²	0,25	0,49	0,74	1,62	3,06
Eisenweglänge l_{Fe}	cm	4,6	7,0	7,0	10,2	13,1
Wickelhöhe, geometrisch	mm	0,52*)	1,3[3]	1,3*)	7,0	8,5
ausnutzbar bei $d \leqq 0{,}6$	mm				6,0	7,5
ausnutzbar bei $d > 0{,}6$	mm				5,5	7,0
Wickelbreite bei einseitiger Drahtherausführung	mm				23,0	30,5
bei beidseitiger Drahtherausführung	mm				21,0	28,5
unterer Windungsumfang	mm	≈ 30	≈ 38	≈ 45	66,0	88,0
Eisenmasse	g	11	13	50	130	320
Typenleistung	VA	0,24	0,9	2	4	11

		M 65/27	M 74/32	M 85/35	M 102/35	M 102/52
Kantenlänge *a*	mm	65	74	85	102	102
Schichthöhe	mm	27	32	35	35	52
effektiverEisenquerschnitt Q_{Fe}	cm²	4,86	6,62	9,15	10,7	15,9
Eisenweglänge l_{Fe}	cm	15,5	17,6	19,7	23,8	23,8
Wickelhöhe, geometrisch	mm	10	12	11	13,5	13,5
ausnutzbar bei $d \leqq 0{,}6$	mm	9	11	10	12	12
ausnutzbar bei $d > 0{,}6$	mm	8,5	10,5	9,5	11	11
Wickelbreite bei einseitiger Drahtherausführung	mm	34	40	46	57	57
bei beidseitiger Drahtherausführung	mm	32	38	44	54	54
unterer Windungsumfang	mm	108	126	146	157	192
Eisenmasse	g	580	900	1 390	1 980	2 900
Typenleistung	VA	25	40	60	120	180

* Fensterquerschnitt, der für die Wicklung zur Verfügung steht, in cm².

Tabelle 7.2. Daten von Übertragerkernen (EI-Schnitt) siehe Bild 7.2

		EI 30/10	EI 38/13	EI 42/14	EI 48/16	EI 54/18
Länge *a*	mm	30	38	42	48	54
Länge *b*	mm	25	32	35	40	45
Schichthöhe	mm	10	13	14	16	18
effektiver Eisenquerschnitt Q_{Fe}	cm²	0,97	1,57	1,76	2,30	2,92
Eisenweglänge l_{Fe}	cm	6,0	7,6	8,4	9,6	10,8
Wickelhöhe, geometrisch	mm	0,52*)	0,84*)	5,4	6,6	7,0
ausnutzbar bei $d \leqq 0,6$	mm			4,8	5,9	6,3
ausnutzbar bei $d > 0,6$	mm			4,6	5,6	5,9
Wickelbreite bei einseitiger Drahtherausführung	mm			17	19,6	22
bei beidseitiger Drahtherausführung	mm			16	18,5	21
unterer Windungsumfang	mm	≈ 50	≈ 62	68	76,3	86,6
Eisenmasse	g	46	88	114	170	234
Typenleistung	VA			3	5	10

		EI 60/20	EI 66/22	EI 78/26	EI 84/28	EI 84/42
Länge *a*	mm	60	66	78	84	84
Länge *b*	mm	50	55	65	70	70
Schichthöhe	mm	20	22	26	28	42
effektiver Eisenquerschnitt Q_{Fe}	cm²	3,60	4,36	6,08	7,60	10,6
Eisenweglänge l_{Fe}	cm	12	13,2	15,6	16,8	16,8
Wickelhöhe, geometrisch	mm	8	9	11	12	12
ausnutzbar bei $d \leqq 0,6$	mm	7,6	8,1	10	10,5	10,5
ausnutzbar bei $d > 0,6$	mm	6,8	7,6	9,3	9	9

Tabelle 7.2. (Fortsetzung)

		EI 60/20	EI 66/22	EI 78/26	EI 84/28	EI 84/42
Wickelbreite bei einseitiger Drahtherausführung	mm	24	27	31	35	35
bei beidseitiger Drahtherausführung	mm	23	25	29	32	32
unterer Windungsumfang	mm	94,6	99	118,6	127,6	155,6
Eisenmasse	g	333	444	730	913	1370
Typenleistung	VA	15	20	35	50	75

		EI 92/23	EI 92/32	EI 106/30	EI 106/45
Länge *a*	mm	92	92	106	106
Länge *b*	mm	74	74	85	85
Schichthöhe	mm	23	32	30	45
effektiver Eisenquerschnitt Q_{Fe}	cm^2	4,77	6,62	7,84	11,75
Eisenweglänge l_{Fe}	cm	19,4	19,4	21,8	21,8
Wickelhöhe, geometrisch					
ausnutzbar bei $d \leqq 0,6$	mm	19	19	19	19
ausnutzbar bei $d > 0,6$	mm	17,5	17,5	17,5	17,5
Wickelbreite bei einseitiger Drahtherausführung	mm	42	42	47	47
bei beidseitiger Drahtherausführung	mm	40	40	44	44
unterer Windungsumfang	mm	107,4	125,4	137,2	167,2
Eisenmasse	g	712	988	1217	1970
Typenleistung	VA	≈ 60	≈ 70	≈ 100	≈ 140

Tabelle 7.2. (Fortsetzung)

		EI 130/35	EI 130/45	EI 150/40	EI 150/50	EI 150/60
Länge *a*	mm	130	130	150	150	150
Länge *b*	mm	105	105	120	120	120
Schichthöhe	mm	35	45	40	50	60
effektiver Eisenquerschnitt Q_{Fe}	cm^2	11,02	14,18	14,4	18,0	21,60
Eisenweglänge l_{Fe}	cm	27,0	27,0	31,0	31,0	31,0
Wickelhöhe, ausnutzbar bei $d \leqq 0,6$	mm	24,5	24,5	28,5	28,5	28,5
ausnutzbar bei $d > 0,6$	mm	23,0	23,0	27,0	27,0	27,0
Wickelbreite bei einseitiger Drahtherausführung	mm	58	58	64	64	64
bei beidseitiger Drahtherausführung	mm	55	55	60	60	60
unterer Windungsumfang	mm	162	182	188	208	228
Eisenmasse	g	2290	2950	3420	4300	5160
Typenleistung	VA	250	290	340	430	580

* Fensterquerschnitt, der für die Wicklung zur Verfügung steht, in cm^2

Tabelle 7.3. Daten von Übertragerkernen (UI-Schnitte) siehe Bild 7.3

		UI 30/10	UI 39/13	UI 48/16	UI 60/20	UI 75/25
Länge *a*	mm	30	39	48	60	75
Länge *b*	mm	50	65	80	100	125
Schichthöhe	mm	10	13	16	20	25
effektiver Eisenquerschnitt Q_{Fe}	cm^2	0,95	1,52	2,3	3,6	5,7
Eisenweglänge l_{Fe}	cm	11,4	14,8	18,2	22,8	28,0
Wickelhöhe, ausnutzbar bei $d \leqq 0,6$	mm	2,7	4,0	4,5	6,4	8,5

Tabelle 7.3. (Fortsetzung)

		UI 30/10	UI 39/13	UI 48/16	UI 60/20	UI 75/25
ausnutzbar bei $d > 0{,}6$	mm	2,5	3,8	4,2	6,0	8,0
Wickelbreite bei einseitiger Drahtherausführung	mm	24	31	39	50	64
bei beidseitiger Drahtherausführung	mm	22	30	37	47	60
unterer Windungsumfang	mm	47	61	75	94	117
Eisenmasse	g	85	186	348	680	1050
Typenleistung	VA	2	8	25	70	100

Beispiel

Durch die Übertragerwicklung entsprechend dem letzten Beispiel fließt ein Gleichstrom von 46 mA. Wie groß ist die Vormagnetisierung des Kernes (Gleichfeldstärke)?

Lösung

Nach Gl. (7.2.) ist

$$H = \frac{4{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{A} \cdot 2600}{9{,}6\ \text{cm}} = 12{,}5\ \text{A cm}^{-1}.$$

Die relative Permeabilität des Kernmaterials ändert sich durch diese Vormagnetisierung und muß an Hand der Gleichfeldstärke und des gewählten Luftspaltes (aus einem passenden Diagramm) ermittelt werden. Ein linearer Zusammenhang zwischen (Gleich-)Feldstärke und relativer Permeabilität besteht nicht, eine Berechnung der relativen Permeabilität ist nicht möglich. Mit der relativen Permeabilität des Kernmaterials beim Einfluß der Gleichfeldstärke läßt sich nach Gl. (7.1.) die Induktivität berechnen.

Induktion im Kern

Die durch die Wechselspannung im Kern bewirkte Induktion berechnet sich zu

$$B = \frac{U}{4{,}44 f Q_{\text{Fe}} n} \quad \text{bzw.} \quad B = \frac{U}{4{,}44 f_u Q_{\text{Fe}} n}; \qquad (7.3.)$$

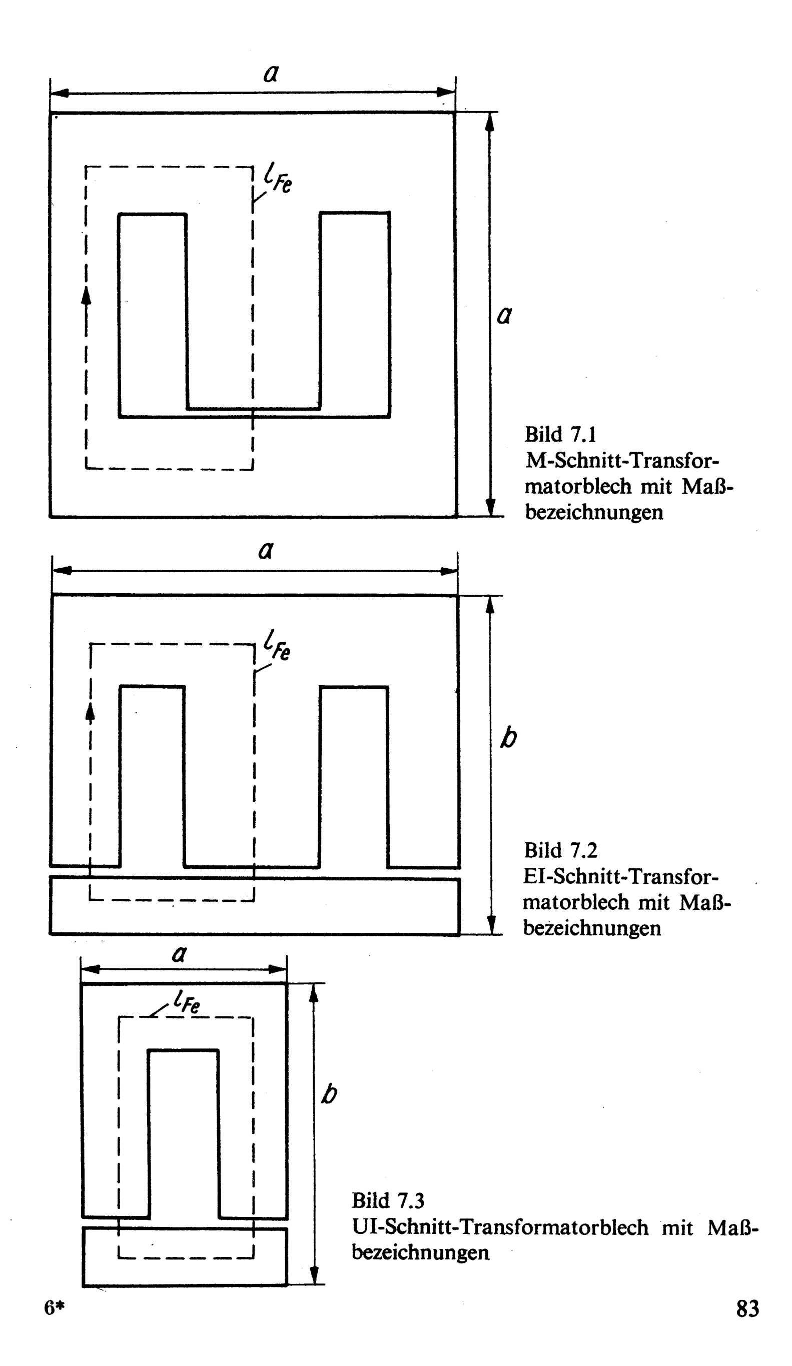


Bild 7.1
M-Schnitt-Transformatorblech mit Maßbezeichnungen

Bild 7.2
EI-Schnitt-Transformatorblech mit Maßbezeichnungen

Bild 7.3
UI-Schnitt-Transformatorblech mit Maßbezeichnungen

U – Spannung, die an der betreffenden Wicklung anliegt, f – Frequenz der Spannung, f_u – untere Übertragungsfrequenz (bei Übertragern). (Die Induktion darf einen bestimmten Wert nicht überschreiten, da sonst der Eisenkern «gesättigt» ist: Die Sekundärspannung folgt dann nicht mehr der Primärspannung, starke nichtlineare Verzerrungen treten im Übertrager auf. Dieser Maximalwert von B ist materialabhängig.)

Beispiel

Wie groß ist die Induktion in einem Transformator mit folgenden Daten: $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $Q_{Fe} = 6{,}08$ cm², $n = 3500$ Wdg.?

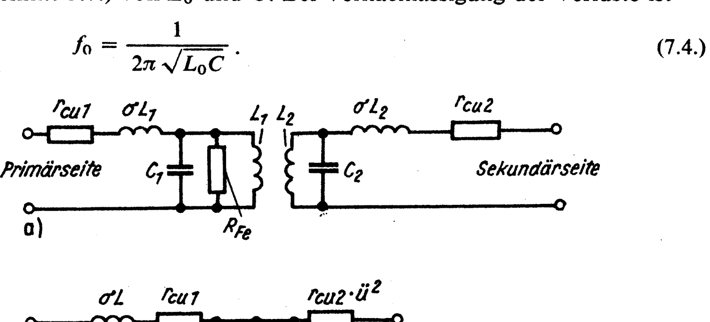
Lösung

Nach Gl. (7.3.) ist

$$B = \frac{220 \text{ V}}{4{,}44 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 6{,}08 \text{ cm}^{-2} \cdot 3500} = 4{,}66 \cdot 10^{-5} \text{ Vs cm}^{-2}.$$

Aus der Ersatzschaltung des Übertragers (Bild 7.4) ergibt sich, daß der Übertrager außer der Induktivität L_e noch eine (parallelliegende) Wicklungskapazität C und eine Streuinduktivität σL hat. (Die Streuinduktivität stellt jenen Anteil der Induktivität dar, der nicht zur Transformierung beiträgt. Bei völlig fester Kopplung wäre $\sigma L = 0$.) Die Hauptresonanz f_0 ergibt sich aus der Parallelresonanz (s. Abschnitt 5.7.) von L_0 und C. Bei Vernachlässigung der Verluste ist

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C}}. \tag{7.4.}$$



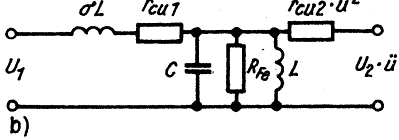


Bild 7.4 Ersatzstromlaufpläne des Übertragers a) mit getrennten Wicklungen, b) mit Zusammenfassung auf der Primärseite

Die Streuinduktivität kommt mit C in Resonanz bei

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma LC}}. \tag{7.5.}$$

Das Verhältnis $\sigma L/L_0$ wird Streufaktor σ genannt. Es gibt unter anderem das Verhältnis der beiden Resonanzfrequenzen an, was wiederum Rückschlüsse auf die Bandbreite des Übertragers gestattet. L_0, σL und C können durch Messungen gewonnen werden. Der dazu benötigte Aufwand ist relativ gering (s. auch: *Streng, K. K.:* abc der Niederfrequenztechnik; Deutscher Militärverlag, Berlin 1969, Seite 151 bis 155). Die Berechnung von Wickelkapazität und Streuinduktivität ist stark mit Fehlern behaftet, da die Wicklungen (lose, fest, streng lageweise oder «wild» gewickelt) unterschiedlich ausgeführt sind. Deswegen können die folgenden Berechnungen nur zur groben Orientierung dienen.

7.2. Streuinduktivität

Die Streuinduktivität eines Übertragers ist

$$\sigma L = n^2 \cdot 4\pi \frac{l_m}{t^2 b}\left(d_{\text{ges}} + \frac{D_{\text{ges}}}{3}\right) \cdot 10^{-9}; \tag{7.6.}$$

l_m – mittlere Windungslänge, t – Unterteilungsfaktor, d. h. Anzahl der Wicklungsisolationen innerhalb der Wicklung (Bild 7.5), b – Wickel-

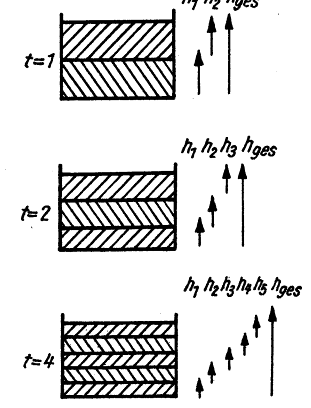


Bild 7.5
Verschachtelte Wicklungen,
t = Anzahl der Trennflächen

breite, d_{ges} – Summe der Dicke sämtlicher Zwischenlagen (Lagenisolationen, Wicklungsisolationen), D_{ges} – Höhe sämtlicher Teilwicklungen.

Beispiel

Ein Übertrager hat die Daten: $n = 3600$, $l_m = 13{,}5$ cm, $t = 3$, $b = 2{,}85$ cm, $d_{ges} = 0{,}062$ cm und $D_{ges} = 0{,}8$ cm. Wie groß ist σL?

Lösung

Nach Gl. (7.6.) ist

$$\sigma L = 3600^2 \cdot 4\pi \frac{13{,}5\ \text{cm}}{3^2 \cdot 2{,}85\ \text{cm}} \left((0{,}062\ \text{cm} + \frac{0{,}8\ \text{cm}}{3}\right) \cdot 10^{-9}$$

$$= 0{,}0282\ \text{H} = 28{,}2\ \text{mH}.$$

7.3. Wickelkapazität

Die Kapazität der Einkammerwicklung (Bild 7.6) ist

$$C = \frac{0{,}12\varepsilon_1 l_m b}{D\left(1 - \sqrt{\frac{4}{\pi}F}\right)} \cdot 10^{-12}; \qquad (7.7.)$$

ε_1 – Dielektrizitätskonstante der Drahtisolation (s. Tabelle 7.4.), D – Wickelhöhe (gesamt), F – Füllfaktor (s. Bild 7.7).
In den Konstanten der Gl. (7.7.) ist ε_0 bereits enthalten (vgl. S. 27 ff.).

Beispiel

Der Übertrager aus dem letzten Beispiel ist mit Lackdraht ($\varepsilon_1 = 6$) gewickelt, der Füllfaktor beträgt 0,502. Wie groß ist die Wickelkapazität?



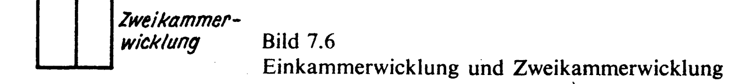


Bild 7.6
Einkammerwicklung und Zweikammerwicklung

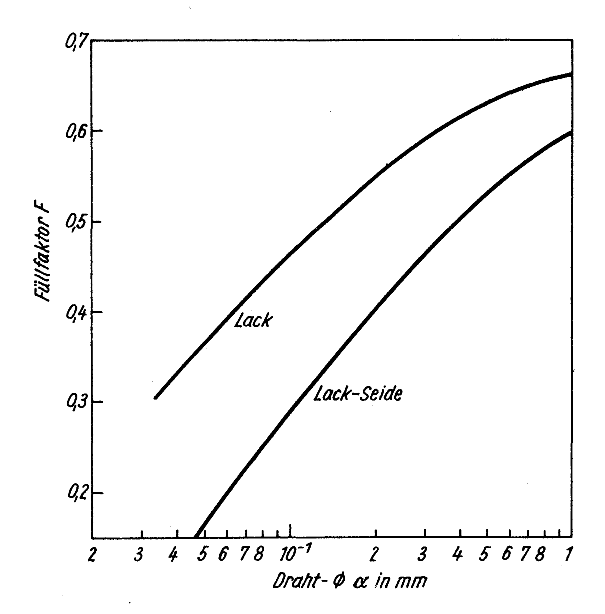


Bild 7.7 Füllfaktor. F in Abhängigkeit vom Drahtdurchmesser, Drahtdurchmesser als Parameter

Lösung

Nach Gl. (7.7.) ist

$$C = \frac{0{,}12\ \text{F cm}^{-1} \cdot 6 \cdot 13{,}5\ \text{cm} \cdot 2{,}85\ \text{cm}}{0{,}8\ \text{cm}\left(1 - \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot 0{,}502}\right)} \cdot 10^{-12} = 1{,}73 \cdot 10^{-10}\ \text{F}$$

$$= 173\ \text{pF}.$$

Es sei nochmals daran erinnert, daß in allen Gleichungen für Spulen, Übertrager und Transformatoren die mechanischen Maße in cm, cm^2 und cm^3 einzusetzen sind!
Mit der Kenntnis der Streuinduktivität σL – Gl. (7.6.) – und der Wickelkapazität – Gl. (7.7.) – sowie der Induktivität aus Gl. (7.1.) können jetzt die Resonanzen berechnet werden. Es ist nach Gl. (7.4.)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{10{,}2\ \text{Vs A}^{-1} \cdot 1{,}73 \cdot 10^{-10}\ \text{As V}^{-1}}}$$

$$= 3\,790\ \text{s}^{-1}\ (= \text{Hz})$$

und nach Gl. (7.5.)

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{2{,}82 \cdot 10^{-2}\,\text{Vs}\,\text{A}^{-1} \cdot 1{,}73 \cdot 10^{-10}\,\text{As}\,\text{V}^{-1}}}$$

$$= 72{,}1 \cdot 10^3\,\text{s}^{-1}\ (= \text{Hz}).$$

Streufaktor

Der Streufaktor σ ist das Verhältnis von σL zu L

$$\sigma = \frac{\sigma L}{L}. \qquad (7.8.)$$

Beispiel

Wie groß ist der Streufaktor in den vorangegangenen Beispielen?

Lösung

Nach Gl. (7.8.) ergibt sich

$$\sigma = \frac{2{,}82 \cdot 10^{-2}\,\text{H}}{10{,}2\,\text{H}} = 2{,}76 \cdot 10^{-3}.$$

7.4. Die mechanischen Übertragerdaten

Im Gegensatz zu den auf den letzten Seiten berechneten elektrischen Daten des Übertragers wird unter «mechanischen» Daten verstanden: Wickelhöhe, Wickelbreite, Drahtlänge (in gewissem Sinne auch Drahtwiderstand) usw. Wie aus Bild 7.3 hervorgeht, hat jede Wicklung eine Wickelhöhe h_n, die sich aus der Summe aller Drahtlagen (Drahtdurchmesser mit Isolation, s. Tabelle 7.5.), den Lagenisolationen und den Wicklungsisolationen ergibt. Bei den Isolationen ist es üblich, zwischen Drähten von < 0,1 mm Durchmesser Lackpapier von 0,03 mm (Rechenwert 0,05), zwischen Drähten von 0,1 ... 0,5 mm Durchmesser Lackpapier der Stärke 0,06 mm (Rechenwert 0,07) und zwischen Drähten über 0,5 mm Durchmesser Lackpapier von 0,1 mm (Rechenwert 0,12) als Lagenisolation vorzusehen. Solche Lageniso-

Tabelle 7.4. Dielektrizitätskonstante von Drahtisolationen (ε_r)

Rotlack (CuL)	6
Rotlack-Naturseide (CuLS)	3
Rotlack-Triacetseide (CuLKS)	4

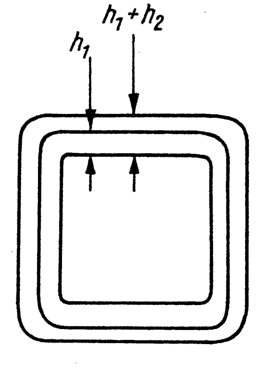


Bild 7.8
Maßbezeichnungen beim Wickeln von Transformatoren

lationen sind nach maximal 3 Lagen einzuschieben, um ein sauberes Wickeln zu gewährleisten. Es ist praktisch unmöglich, völlig eng, d. h. ohne jeglichen Luftzwischenraum, zu wickeln.
Sicherlich ist ein industriell gefertigter Wickel straffer als ein Wickel eines (ungeübten) Amateurs, aber Luftzwischenräume enthalten beide! Ihre Größe kann nicht angegeben werden, sondern ergibt sich nur aus Erfahrungswerten.
Die unterste Wicklung hat die (mittlere) Windungslänge (s. Bild 7.8)

$$l_{m1} = l_{mu} + h_1\pi. \qquad (7.9.)$$

Die folgende Wicklung weist dann die mittlere Windungslänge auf

$$l_{m2} = l_{mu} + (2h_1 + h_2)\pi. \qquad (7.10.)$$

Für die folgende Wicklung ergibt sich entsprechend

$$l_{m3} = l_{mu} + (2h_1 + 2h_2 + h_3)\pi \qquad (7.11.)$$

usw.
Die Drahtlängen jeder Wicklung ergeben sich aus dem Produkt ihrer jeweiligen mittleren Windungslänge und der Windungszahl der Wicklung

$$L_{wn} = l_{mn}n. \qquad (7.12.)$$

Der Drahtwiderstand jeder Wicklung ist das Produkt des spezifischen Drahtwiderstandes (s. Tabelle 7.5.) und der mit Gl. (7.12.) berechneten Drahtlänge.

Beispiel

Ein Übertrager der Größe *M 74/32* hat die Wicklungen:
W_1 – 7 Lagen zu je 178 Wdg. 0,16-mm-CuL (Kupferlackdraht), je 1 Lage Lagenisolation nach der 3. und 5. Lage, bestehend aus 1 × 0,1 mm LP (Lackpapier), 1 Wicklungsisolation, bestehend aus

2 Lagen LP 0,1 mm. Zuzüglich ist auf der Spule eine Grundisolation von 2 Lagen LP 0,1 mm aufzubringen – das gilt für alle Übertrager! Damit wird die gesamte Wickelhöhe h_1

Grundisolation	0,24 mm
7 Lagen zu 0,176 mm	1,232 mm
Lagenisolation 2 × 0,12 mm	0,24 mm
Wicklungsisolation	0,24 mm
Wickelhöhe h_1	1,952 mm

Der Windungsumfang ergibt sich zu

$$l_{m1} = 126\,\text{mm} + \pi \cdot 1{,}952\,\text{mm} = 132\,\text{mm} = 0{,}132\,\text{m}.$$

Die Drahtlänge errechnet sich zu

$$L_{w1} = 7 \cdot 178 \cdot 0{,}132\,\text{m} = 164\,\text{m}.$$

Mit dem spezifischen Widerstand von 0,16-mm-CuL-Draht aus Tabelle 7.6. $r_{spez} = 0{,}872\,\Omega\,\text{m}^{-1}$ wird

$$R_{w1} = 164\,\text{m} \cdot 0{,}872\,\Omega \cdot \text{m}^{-1} = 143\,\Omega.$$

Bei den folgenden Wicklungen wird ebenso verfahren. Das angefangene Beispiel aus dem bereits erwähnten Buch «abc der Niederfrequenztechnik» soll aus Platzgründen nicht fortgesetzt werden – hier kommt es lediglich darauf an, zu zeigen, *wie* man die mechanischen Übertragerdaten berechnet. Da Erfahrungswerte aus der Praxis dabei eine große Rolle spielen, lassen sich solche Berechnungen nicht so exakt durchführen wie die anderen in dieser Broschüre gezeigten. Transformatorberechnungen sind vom mathematischen Gesichtspunkt einfach, jedoch relativ langwierig, und setzen praktische Erfahrung voraus.

Tabelle 7.5. Daten von Cu-Drähten

Durchmesser blank	CuL	CuLS	Querschnitt in mm²	Widerstand in Ω/m	Masse in g/m	maximaler Strom in mA*)	in mA**)
0,03	0,04		0,000707	24,8	0,000629	0,7	1,8
0,04	0,05		0,00126	13,9	0,00112	1,2	3,1
0,05	0,062	0,108	0,00196	8,92	0,0175	2	5
0,06	0,075	0,122	0,00252	6,18	0,0252	3	7,5
0,07	0,085	0,132	0,00385	4,55	0,0344	4	10
0,08	0,095	0,142	0,00503	3,47	0,0449	5	13
0,09	0,108	0,153	0,00636	2,75	0,0568	6,4	16

Tabelle 7.5. (Fortsetzung)

Durchmesser blank	CuL	CuLS	Quer-schnitt in mm²	Wider-stand in Ω/m	Masse in g/m	maximaler Strom in mA*)	in mA**)
0,10	0,115	0,163	0,00785	2,23	0,0699	8	20
0,11	0,13	0,183	0,00950	1,84	0,0847	9,5	24
0,12	0,14	0,194	0,0113	1,55	0,101	11	28
0,13	0,15	0,204	0,0133	1,32	0,119	13	33
0,14	0,16	0,214	0,0154	1,14	0,137	15	38
0,15	0,17	0,225	0,0177	0,990	0,158	18	45
0,16	0,18	0,235	0,0201	0,872	0,179	20	50
0,17	0,19	0,245	0,0227	0,772	0,202	23	57
0,18	0,20	0,255	0,0254	0,688	0,226	25	63
0,19	0,21	0,266	0,0284	0,627	0,253	28	71
0,20	0,22	0,276	0,0314	0,557	0,280	31	78
0,21	0,23	0,288	0,0346	0,505	0,308	35	87
0,22	0,24	0,300	0,0380	0,462	0,339	38	95
0,23	0,25	0,310	0,0415	0,422	0,370	41	100
0,24	0,264	0,320	0,0452	0,387	0,403	45	113
0,25	0,275	0,330	0,0491	0,357	0,438	49	123
0,26	0,286	0,341	0,0531	0,329	0,474	53	133
0,27	0,297	0,351	0,0573	0,305	0,511	57	143
0,28	0,308	0,362	0,0616	0,285	0,550	62	154
0,29	0,319	0,372	0,0661	0,264	0,590	66	165
0,30	0,33	0,382	0,0707	0,248	0,629	71	177
0,32	0,35	0,409	0,0804	0,217	0,716	80	201
0,35	0,38	0,439	0,0962	0,182	0,857	96	240
0,38	0,41	0,469	0,113	0,155	1,01	113	282
0,40	0,43	0,489	0,126	0,139	1,12	126	315
0,45	0,48	0,546	0,159	0,110	1,42	159	397
0,50	0,535	0,596	0,196	0,0893	1,75	196	490
0,55	0,59	0,654	0,238	0,0737	2,12	238	695
0,6	0,64	0,704	0,283	0,0618	2,52	283	850
0,7	0,74	0,804	0,385	0,0455	3,44	385	1,16 A
0,8	0,84	0,917	0,503	0,0348	4,49	503	1,51 A
0,9	0,95	1,02	0,636	0,0276	5,58	636	1,59 A
1,0	1,05	1,17	0,785	0,0223	6,99	785	1,96 A
1,5	1,56	1,75	1,77	0,0992	15,8	1,77 A	4,42 A
2,0	2,07	2,34	3,14	0,00557	28,0	3,14 A	7,85 A
2,5	2,59	2,92	4,91	0,00357	44,0	4,91 A	12,3 A

* für $i = 1\ \mathrm{A\ mm^{-2}}$
** für $i = 2{,}5\ \mathrm{A\ mm^{-2}}$

8. Gleichrichtung

8.1. Berechnung des Gleichrichters

Aus dem Diagramm in Bild 8.1 und dem Verhältnis pR_a/R_i wird zunächst der Stromflußwinkel α des Gleichrichters bestimmt. Mit diesem kann der Unsymmetriewinkel σ (s. Bild 8.2) berechnet werden

$$\delta = \arctan \frac{\frac{\pi}{p} - \hat{\alpha}}{2\pi f C_L R_a \tan \alpha}; \qquad (8.1.)$$

p – Anzahl der gleichgerichteten Phasen, 1 beim Einweggleichrichter, 2 beim Gegentakt- und Brückengleichrichter, $\hat{\alpha}$ – Stromflußwinkel (aus Bild 8.1) in Radian (Bogenmaß) $\hat{\alpha} = \alpha_0 \pi/180$, f – Frequenz der gleichzurichtenden Wechselspannung, C_L – Kapazität des Siebkondensators (s. Bild 8.3), R_a – Lastwiderstand des Gleichrichters ($R_a = U_{gl}/I_{gl}$), R_i – Innenwiderstand des Gleichrichters.
Sind beide Winkel – Stromflußwinkel α und Unsymmetriewinkel δ – bekannt, so können nachstehend genannte Aufgaben leicht berechnet werden.
Die Gleichspannung am Ladekondensator errechnet sich zu

$$U_{gl} = U_w \sqrt{2} \cos \alpha \cos \delta . \qquad (8.2.)$$

Die Brummspannung (Amplitude) am Ladekondensator ergibt sich zu

$$\Delta U = U_w \sin \alpha \sin \delta . \qquad (8.3.)$$

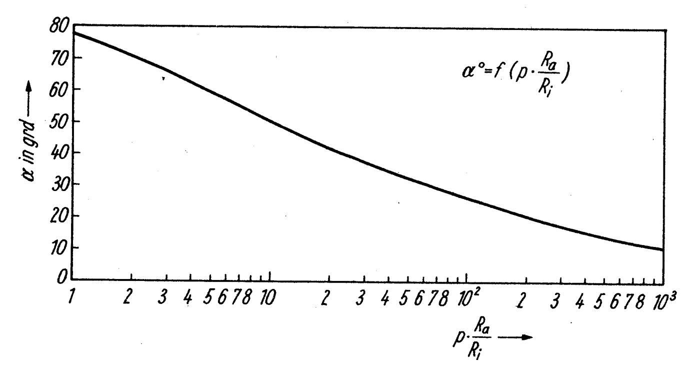


Bild 8.1 Stromflußwinkel eines Gleichrichters in Abhängigkeit von $p(R_a/R_i)$

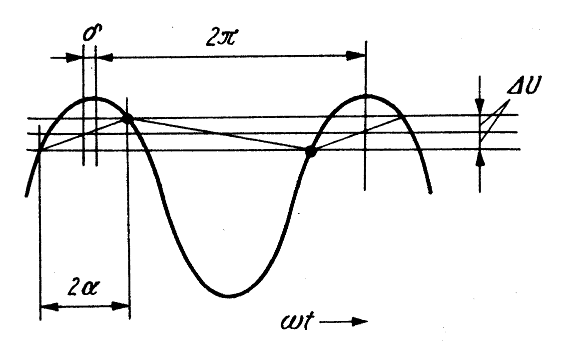


Bild 8.2 Spannungsbild der Einweggleichrichtung

Achtung! Diese Gleichung gibt nur den genäherten Effektivwert an! Von Interesse kann auch der Wirkungsgrad η des Gleichrichters sein (nur des Gleichrichters allein!). Er bestimmt sich näherungsweise zu

$$\eta \approx \frac{2\pi R_i (1 + \cos 2\alpha)}{p R_a (2\alpha - \sin 2\alpha)}. \qquad (8.4.)$$

Den Spitzenstrom bestimmt man nach Bild 8.4 mit dem Verhältnis U_{gl}/U_w. In Gl. (8.2.) und Gl. (8.3.) bedeuten zusätzlich zu den bekannten Symbolen U_{gl} – Gleichspannung am Ladekondensator, U_w – Wechselspannung vor dem Gleichrichter.

Beispiel

Ein Brückengleichrichter (Bild 8.5) ist zu berechnen. Bekannt sind: die Gleichspannung am Ladekondensator $U_{gl} = 24$ V, der Strom in dem Lastwiderstand $I_{gl} = 0{,}2$ A, der Innenwiderstand des Gleichrichters $R_i = 1{,}3\ \Omega$, die Kapazität des Ladekondensators $C_L = 500\ \mu$F, die Frequenz der Wechselspannung $f = 50$ Hz. Wie groß muß a) die

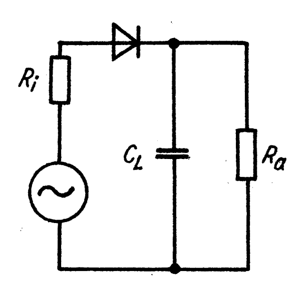


Bild 8.3
Stromlaufplan eines Einweggleichrichters

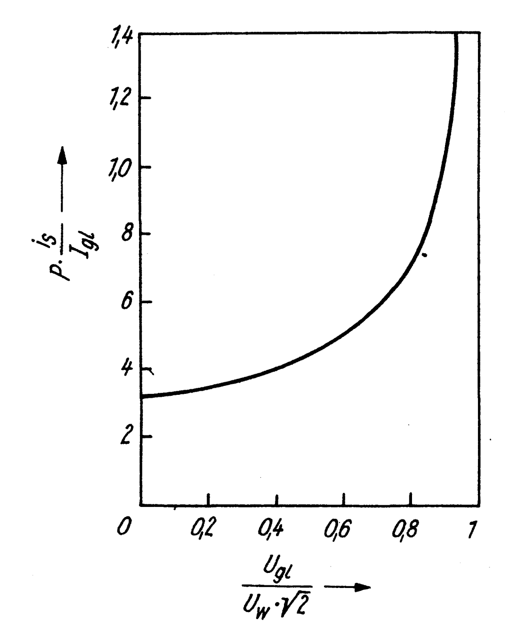


Bild 8.4
Spitzenstrom $p(i_s/I_{gl})$ in Abhängigkeit von $U_{gl}/U_w\sqrt{2}$

Wechselspannung am Eingang des Gleichrichters sein, b) welchen Wert hat die Brummspannung am Ladekondensator, und c) wie groß ist annähernd der Wirkungsgrad des Gleichrichters?

Lösung

Nebenrechnungen

$$R_a = \frac{U_{gl}}{I_{gl}} = \frac{24\ \text{V}}{0{,}2\ \text{A}} = 120\ \text{VA}^{-1}\ (= \Omega)$$

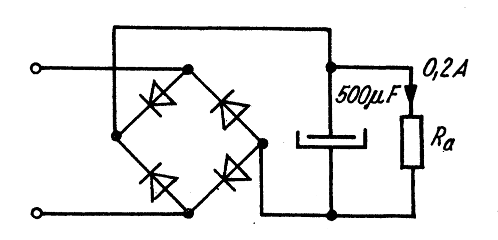


Bild 8.5
Graetz-Gleichrichter (Beispiel auf S. 93/94)

und folglich

$$p\frac{R_a}{R_i} = \frac{2 \cdot 120\,\text{VA}^{-1}}{1{,}3\,\text{VA}^{-1}} = 185.$$

Damit ergibt sich aus Bild 8.2 der Stromflußwinkel $\alpha \approx 21°$, im Bogenmaß $21°\pi/180° = 0{,}367$.
Mit diesen Werten berechnet man Gl. (8.1.):

$$\delta = \arctan \frac{\frac{\pi}{2} - 0{,}367}{2\pi \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,\text{As V}^{-1} \cdot 120\,\text{VA}^{-1} \tan 21°}$$

$$= 9{,}45°.$$

Gl. (8.2.) wird nach U_w aufgelöst:

a) $$U_w = \frac{24\,\text{V}}{\sqrt{2}\cos 21° \cos 9{,}45°} = 18{,}4\,\text{V},$$

b) $$\Delta U = 18{,}4\,\text{V} \sin 21° \sin 9{,}45° = 1{,}1\,\text{V},$$

c) $$\eta = \frac{2\pi \cdot 1{,}3\,\text{VA}^{-1}\,[1 + \cos(2 \cdot 21)°]}{2 \cdot 120\,\text{VA}^{-1}\,[2 \cdot 0{,}367 - \sin(2 \cdot 21)°]} = 0{,}915 \text{ oder } 91{,}5\,\%.$$

Für die Berechnung des Gleichrichters gibt es auch Faustformeln:
Für $\delta \to 0$ ist

$$U_{gl} \approx U_w \sqrt{2} \cos\alpha \frac{R_a}{R_i + R_a} \qquad (8.2.a)$$

und

$$\Delta U \approx \frac{I_{gl}}{4fpC}. \qquad (8.3.a)$$

Beispiel

Die Wechselspannung und die Brummspannung aus dem letzten Beispiel sollen mit den Faustformeln Gl. (8.2.a) und Gl. (8.3.a) überprüft werden.

Lösung

$$U_w = \frac{U_{gl}(R + R_a)}{\sqrt{2}\cos\alpha\, R_a} = \frac{24\,\text{V}\,(1{,}3\,\text{VA}^{-1} + 120\,\text{VA}^{-1})}{\sqrt{2}\cos 21° \cdot 120\,\text{VA}^{-1}} = 18{,}4\,\text{V},$$

$$\Delta U = \frac{0{,}2\,\text{A}}{4 \cdot 50\,\text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,\text{AsV}^{-1}} = 1\,\text{V}.$$

Die gute Übereinstimmung der Ergebnisse von Gl. (8.2.) und der Faustformel Gl. (8.2.a) bzw. Gl. (8.3.) und Gl. (8.3.a) ist darauf zurückzuführen, daß in dem Beispiel der Unsymmetriewinkel δ klein war. Das war aber Voraussetzung für ihre Gültigkeit.

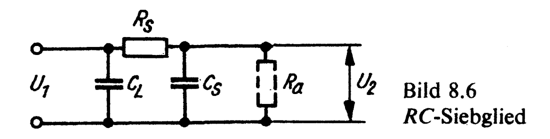


Bild 8.6
RC-Siebglied

8.2. Berechnung der Siebung

Siebkette mit *RC*-Glied (Bild 8.6)
Der Siebfaktor ist

$$s = \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{R_a}\right)^2 + (p \cdot 2\pi f r_s C_s)^2}\,. \tag{8.5.}$$

In den meisten Fällen genügt aber die Näherungsformel

$$s \approx 2\pi f p r_s C_s\,. \tag{8.5.a}$$

In Gl. (8.5.) und Gl. (8.5.a) bedeuten:
r_s – Siebwiderstand, C_s – Siebkondensator, R_a – Belastungswiderstand am Ausgang der Siebkette.
Bild 8.5 zeigt den Stromlaufplan. Die anderen Symbole sind bekannt.
Siebkette mit *LC*-Glied (Bild 8.7)
In diesem Fall ist der Siebfaktor

$$s = \frac{U_1}{U_2}$$

$$= \sqrt{\left[1 + \frac{r_s}{R_a} - (2\pi f p)^2 LC_s\right]^2 + (2\pi f p)^2 \left(r_s \cdot C_s + \frac{L}{R_a}\right)^2} \tag{8.6.}$$

oder mit der meist ausreichenden Näherungsgleichung

$$s \approx (2\pi f p)^2 LC_s\,. \tag{8.6.a}$$

Auch hier wieder die Bedeutung der Symbole. Neu ist r_s – ohmscher Widerstand der Drossel, L – Induktivität der Drossel.

Beispiel

Zu dem Gleichrichter im letzten Beispiel soll ein *RC*-Siebglied berechnet werden (Vergleich zwischen exakter und genäherter Berech-

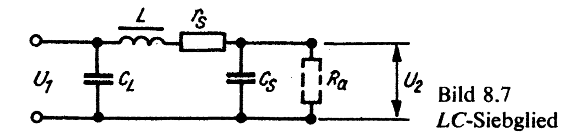


Bild 8.7
LC-Siebglied

nung). Die Werte sind: $R_s = 18\,\Omega$, $C_s = 2000\,\mu F$, $R_a = 100\,\Omega$. Wie groß muß die Induktivität der Drossel sein (Näherung genügt), um den 18-Ω-Widerstand zu ersetzen?

Lösung

Nach Gl. (8.5.) ist

$$s = \sqrt{\left(1 - \frac{18\ VA^{-1}}{100\ VA^{-1}}\right)^2 + (2\pi \cdot 2 \cdot 50\ s^{-1} \cdot 18\ VA^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ AsV^{-1})^2}$$
$$= 22{,}6$$

oder mit der Näherungsgleichung Gl. (8.5.a)

$$s \approx 2 \cdot 2\pi \cdot 50\ s^{-1} \cdot 18\ VA^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ AsV^{-1} = 22{,}6.$$

Löst man die Näherungsgleichung Gl. (8.6.a) nach L auf, so erhält man

$$L = \frac{s}{(2p\pi f)^2\ C_s} \qquad (8.6.b)$$

und mit den bekannten Werten

$$L = \frac{22{,}6}{(2 \cdot 2\pi \cdot 50\ s^{-1})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ AsV^{-1}}$$
$$= 2{,}86 \cdot 10^{-2}\ VsA^{-1} = 28{,}6\ mH.$$

9. Vierpole

9.1. Wellenwiderstand

Der Begriff «Wellenwiderstand» ist nicht die Bezeichnung eines Bauelementes. Er ist vielmehr eine grundsätzliche Eigenschaft jedes Vierpols, der zur Übertragung elektrischer Signale verwendet wird (Bild 9.1). Dabei hat es im Prinzip keine Bedeutung, um welche Art Vierpol es sich handelt. Es kann ein Filter, ein Dämpfungsglied und sogar eine einfache Übertragungsleitung sein*. Alle haben vier Anschlüsse (Pole): Je 2 im Eingang und im Ausgang. Es können sogar je eine Eingangs- und eine Ausgangsklemme miteinander verbunden sein (unsymmetrischer Vierpol, Bild 9.2).
Es genügt in den seltensten Fällen, bei der Betrachtung der Vierpole nur ihre ohmschen Widerstände bzw. Leitwerte zu berücksichtigen. Da Wechselstrom (im allgemeinen Sinne des Wortes) übertragen werden soll, müssen auch die Wechselstromwiderstände berücksichtigt werden. Das sind die induktiven Blindwiderstände

$$X_L = j\omega L \text{ – siehe Gl. (3.1.) –}$$

und die kapazitiven Blindwiderstände

$$X_c = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \text{ – siehe Gl. (4.1.) –.}$$

Der einfachste Ersatzstromlaufplan eines Vierpols läßt sich gemäß Bild 9.3 darstellen: Parallel zum Eingang liegen ein ohmscher Widerstand und eine Kapazität, zwischen Ein- und Ausgang («längs») liegen ein ohmscher Widerstand und eine Induktivität. Das ist z. B. bei jeder Übertragungsleitung im Prinzip der Fall. Der Ersatzstromlaufplan gemäß Bild 9.3 darf nun nicht zu dem falschen Schluß führen, man könnte die einzelnen Elemente (*R*, *L*, *C* und *G*) voneinander isolieren und nur einige von ihnen verwenden: Alle diese Ele-

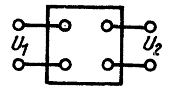


Bild 9.1
Symmetrischer Vierpol

* Die aktiven Vierpole (Verstärkerelemente) werden hier außer acht gelassen.

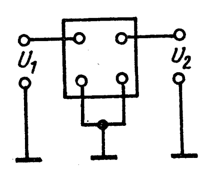


Bild 9.2
Unsymmetrischer Vierpol

mente «verteilen» sich auf der Übertragungsleitung, d. h., sie sind auf jedem Leitungsstück entsprechend seiner Länge vorhanden. Der Wellenwiderstand jedes Vierpols ist definiert als

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}\,; \tag{9.1.}$$

R – ohmsche Längswiderstand, L – Induktivität, G – Ableitung $(= 1/R)$ parallel zum Ein- bzw. Ausgang, C – Kapazität, ω – Kreisfrequenz – $2\pi f$ – der Wechselspannung, für die die Gleichung gilt. Bild 9.3 zeigt die Zusammenschaltung dieser Komponenten zu einem Vierpol. Wendet man diese für alle passiven Vierpole gültige Gl. (9.1.) auf HF-Energieleitungen (Flachband-, Schlauch- oder Koaxialkabel) an, wie sie beispielsweise als Antennenleitungen für Fernsehempfänger benutzt werden, so ist $R \ll \omega L$ und $G \ll \omega C$. Gl. (9.1.) vereinfacht sich dann zu

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{9.1.a}$$

Diese Vereinfachung gilt bei Hochfrequenz immer – der entstehende Fehler gegenüber der Berechnung mit der exakten Gl. (9.1.) kann bedenkenlos vernachlässigt werden. Erst bei Tonfrequenz ($\omega \approx 5000\ \mathrm{s}^{-1}$) ist ein kleiner Fehler vorhanden, bei technischem Wechselstrom ($f = 50$ Hz bzw. $\omega = 314\ \mathrm{s}^{-1}$) kann man Gl. (9.1.a) nicht benutzen! Die Länge des Leitungsstückes spielt für die Größe des Wellenwiderstandes keine Rolle, Z ist unabhängig von der Leitungslänge. Anwendung in der Praxis: Es genügt, von einem unbekannten Kabel an einem Stück (etwa 1 m) L und C zu messen und damit nach Gl. (9.1.a) den Wellenwiderstand zu berechnen.

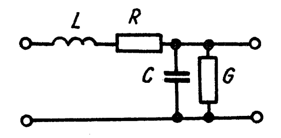


Bild 9.3
Vereinfachte Ersatzschaltung einer Übertragungsleitung

Beispiel

An einem Koaxialkabel-Leitungsstück sind gemessen: $L = 0{,}153\ \mu H$; $C = 42{,}5$ pF. Wie groß ist sein Wellenwiderstand?

Lösung

Nach Gl. (9.1.a) ist

$$Z = \sqrt{\frac{1{,}53 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{VsA^{-1}}}{4{,}25 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{AsV^{-1}}}} = 60\ \mathrm{VA^{-1}}\ (= \Omega).$$

9.2. Filter

Filter aus Induktivitäten (L) und Kapazitäten (C) bestehend, werden in allen Frequenzbereichen dazu verwendet, Frequenzen oder Frequenzbereiche hervorzuheben oder zu unterdrücken. Ihre exakte Berechnung kann sehr kompliziert sein. Für die praktischen Belange des Elektronikamateurs werden LC-Filterberechnungen unter vereinfachten Voraussetzungen durchgeführt. Ihre Ergebnisse genügen in den meisten Fällen. Diese Filterberechnungen erfordern nur das Beherrschen der Schulmathematik (Oberstufe) und die Kenntnis einiger Gleichungen. Diese Gleichungen sollen im folgenden erklärt werden. Ein Wort zur Genauigkeit der Berechnungen: Im Gegensatz zu den meisten Rechnungen in dieser Broschüre werden die Rechnungen hier mit 4 Stellen (sonst 3) durchgeführt. Es zeigte sich, daß das bei Filtern oft notwendig ist.

9.2.1. LC-Tiefpaß (Bild 9.4)

Ein Tiefpaß hat die Aufgabe, alle Frequenzen bis zu einer Grenzfrequenz gleichmäßig und mit wenig Dämpfung zu übertragen. Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz werden um so stärker gedämpft, je größer sie sind. Diese Grenzfrequenz wird beim Tiefpaß mit 1,4

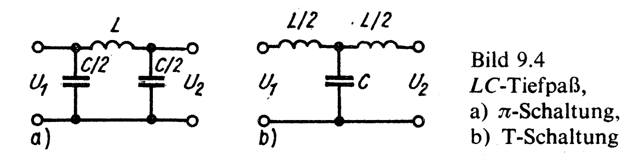


Bild 9.4
LC-Tiefpaß,
a) π-Schaltung,
b) T-Schaltung

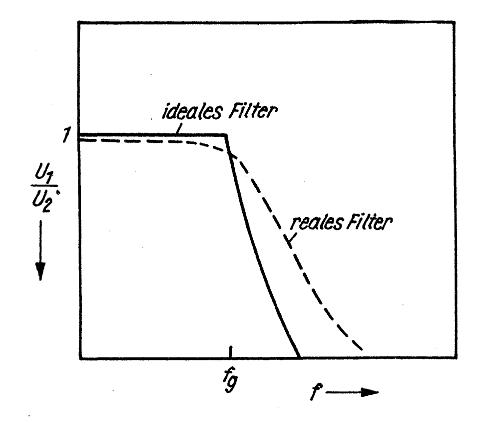


Bild 9.5
Übertragungsmaß U_1/U_2 eines LC-Tiefpasses in Abhängigkeit von der Frequenz

multipliziert, um die «Ecke» in der Dämpfungskurve (Bild 9.5) möglichst in den Sperrbereich zu schieben. Dadurch ist bei der Grenzfrequenz selbst noch kein Dämpfungsanstieg vorhanden. Die Dimensionierung des Filters:

$$L = \frac{Z}{2\pi f_T}, \qquad (9.2.)$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_T Z}; \qquad (9.3.)$$

Z – erwähnte Wellenwiderstand des Filters; er ist beim Filter in T-Schaltung mit $Z = 1{,}25R_G = 1{,}25R_A$ oder $R_G = R_A = 0{,}8Z$ und beim Filter in π-Schaltung mit $Z = 0{,}8R_G = 0{,}8R_A$ oder $R_G = R_A = 1{,}25Z$ zu korrigieren (R_G – Generatorwiderstand, R_a – Abschlußwiderstand), f_T – Grenzfrequenz mit dem erwähnten Korrekturfaktor 1,4.
Die Bedeutung der übrigen Symbole dürfte bekannt sein bzw. geht aus Bild 9.4 hervor.

Beispiel

Es ist ein LC-Tiefpaß zu entwerfen, der alle Frequenzen bis 16 kHz überträgt, über 16 kHz aber unterdrückt (bei 40 kHz um mindestens 30 dB). Der Generatorwiderstand R_G beträgt 200 Ω.

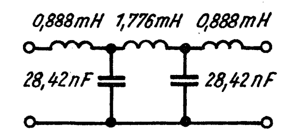


Bild 9.6
Zweigliedriger LC-Tiefpaß (Beispiel auf S. 101)

Lösung

Die korrigierte Grenzfrequenz ist 16000 Hz · 1,4 = 22400 Hz. Es wird eine T-Schaltung gewählt, der korrigierte Wellenwiderstand beträgt dann $Z = 1{,}25 \cdot 200\,\Omega = 250\,\Omega$. Die Frequenz 40 kHz liegt 40/22,4 = 1,79mal über der Grenzfrequenz.
Erfahrungen aus der Praxis besagen, daß man bei LC-Filtern im Tonfrequenzbereich mit etwa 13 dB je Oktave als Dämpfung im Sperrbereich rechnen kann. Das bedeutet, daß die Dämpfung bei 40 kHz oder 1,79 Oktaven über der Grenzfrequenz

$$1{,}79 \cdot 13\,\text{dB} = 23{,}3\,\text{dB}$$

beträgt. Um die geforderte Dämpfung von 30 dB zu realisieren, müssen mindestens 2 Glieder hintereinander angeordnet sein (ihre Dämpfungen addieren sich dann). Ihre Berechnung:

$$L = \frac{250\,\text{VA}^{-1}}{2\pi \cdot 2{,}24 \cdot 10^4\,\text{s}^{-1}} = 1{,}776 \cdot 10^{-3}\,\text{VsA}^{-1} = 1{,}776\,\text{mH},$$

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 2{,}24 \cdot 10^4\,\text{s}^{-1} \cdot 250\,\text{VA}^{-1}} = 2{,}842 \cdot 10^{-8}\,\text{AsV}^{-1}$$

$$= 28{,}42\,\text{nF}.$$

Damit ist das Filter berechnet. Bild 9.6 zeigt seinen Stromlaufplan. Man beachte, daß L zweimal mit dem Faktor 0,5 multipliziert werden muß (s. Bild 9.4).

9.2.2. LC-Hochpaß (Bild 9.7)

Der Hochpaß hat eine zum Tiefpaß entgegengesetzte Aufgabe: Er läßt alle Frequenzen oberhalb einer Grenzfrequenz mit wenig und konstanter Dämpfung durch und dämpft alle Frequenzen unterhalb

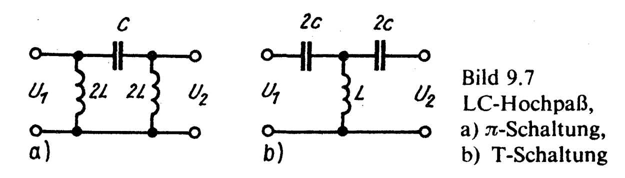


Bild 9.7
LC-Hochpaß,
a) π-Schaltung,
b) T-Schaltung

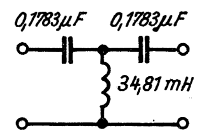


Bild 9.8
LC-Hochpaß, (Beispiel auf S. 103)

dieser Grenzfrequenz (um so stärker, je kleiner sie sind). Dieses «entgegengesetzte» Verhalten kommt auch bei der Korrektur der Grenzfrequenzen zum Ausdruck: f_g wird durch 1,4 dividiert, um bei der Grenzfrequenz selbst möglichst noch nicht im Sperrbereich zu liegen. In bezug auf die korrigierten Wellenwiderstände gilt das gleiche wie bei den *LC*-Tiefpässen. Bei *T*-Schaltungen ist $Z = 1{,}25R_G = 1{,}25R_a$ bzw. $R_G = R_A = 0{,}8Z$, und bei π-Schaltungen hat $Z = 0{,}8R_G = 0{,}8R_A$ bzw. $R_G = R_A = 1{,}25Z$. Auch für die Dimensionierung sind die gleichen Gesichtspunkte von Bedeutung wie für den Tiefpaß, d. h., es gelten Gl. (9.2.) und Gl. (9.3.).

Beispiel

Ein Hochpaß soll eine Grenzfrequenz von 4 kHz haben, d. h., alle Frequenzen unterhalb 4 kHz sollen gedämpft und alle Frequenzen oberhalb 4 kHz sollen durchgelassen werden, $R_A = 500\ \Omega$.

Lösung

Für eine *T*-Schaltung ist

$$L = \frac{1{,}25 \cdot 500\ \text{VA}^{-1}}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3\ \text{s}^{-1}/1{,}4} = 3{,}481 \cdot 10^{-2}\ \text{VsA}^{-1} = 34{,}81\ \text{mH},$$

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3\ \text{s}^{-1} \cdot 500\ \text{VA}^{-1} \cdot 1{,}25/1{,}4} = 8{,}913 \cdot 10^{-8}\ \text{AsV}^{-1}$$

$$= 89{,}13\ \text{nF}$$

Bild 9.8 zeigt die ausgeführte Schaltung.

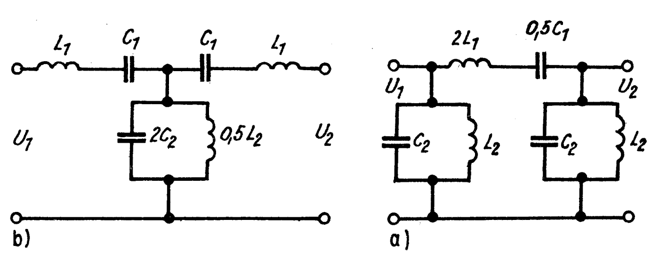


Bild 9.9 LC-Bandpaß, a) π-Schaltung, b) T-Schaltung

9.2.3. LC-Bandpaß (Bild 9.9)

Beim Bandpaßfilter wird ein bestimmtes Frequenzband $f_{g1} \ldots f_{g2}$ durchgelassen, außerhalb dieses Durchlaßbereiches sperrt der Bandpaß um so stärker, je weiter die betreffende Frequenz vom Durchlaßbereich entfernt ist (Bild 9.10). Der Bandpaß ist gewissermaßen die Kombination eines Tiefpasses mit einem Hochpaß, wobei die Grenzfrequenz des Tiefpasses unterhalb der des Hochpasses liegt.
In bezug auf die Grenzfrequenzen gilt sinngemäß das gleiche wie bei Tief- und Hochpaß: Die Grenzfrequenzen werden um den Faktor 1,4 jeweils in den Sperrbereich verlagert (:1,4 bei f_{g1} und · 1,4 bei f_{g2}). In bezug auf die Korrektur der Wellenwiderstände gilt das gleiche wie bei den bisher behandelten LC-Filtern. Nachstehend die charakteristischen Bemessungsgleichungen:

$$L_1 = \frac{Z}{2\pi(f_{g2} - f_{g1})}\,, \tag{9.4.}$$

$$L_2 = \frac{2\pi(f_{g2} - f_{g1})}{4\pi^2 f_{g1} f_{g2}}\,, \tag{9.5.}$$

$$C_1 = \frac{Z \cdot 2\pi(f_{g2} - f_{g1})}{Z \cdot 4\pi^2 f_{g1} f_{g2}}\,, \tag{9.6.}$$

$$C_2 = \frac{1}{2Z\pi(f_{g2} - f_{g1})}\,. \tag{9.7.}$$

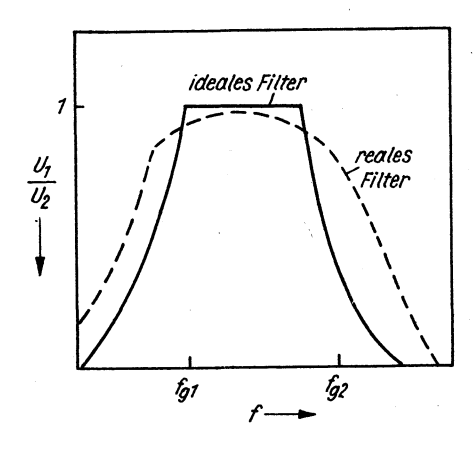


Bild 9.10
Übertragungsmaß U_1/U_2 eines LC-Bandpasses in Abhängigkeit von der Frequenz

Beispiel

Ein Bandpaßfilter soll die Frequenzen von 19 bis 57 kHz durchlassen, bei allen Frequenzen außerhalb dieses Bereiches soll es dämpfen. Es ist als π-Filter (Bild 9.9 a) auszuführen, Quell- und Abschlußwiderstände betragen je 500 Ω.

Lösung

Beim π-Filter ist $Z = 0{,}8 R_G = 0{,}8 R_A$, hier $Z = 0{,}8 \cdot 500\,\Omega = 400\,\Omega$. Außerdem beträgt

$$f_{g1} = \frac{1{,}9 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}}{1{,}4} = 1{,}357 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{und}$$

$$f_{g2} = 1{,}4 \cdot 5{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1} = 7{,}980 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Mit diesen Werten wird gemäß den Gl. (9.4.) bis Gl. (9.7.) das Filter berechnet:

$$L_1 = \frac{400\,\mathrm{VA}^{-1}}{2\pi(7{,}98 - 1{,}357) \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}} = 9{,}612 \cdot 10^{-4}\mathrm{VsA}^{-1}$$
$$= 0{,}9612\,\mathrm{mH},$$

$$L_2 = \frac{400\,\mathrm{VA}^{-1} \cdot 2\pi(7{,}98 - 1{,}357) \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}}{4\pi^2 \cdot 7{,}98 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1{,}357 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}}$$
$$= 3{,}894 \cdot 10^{-3}\mathrm{VsA}^{-1} = 3{,}894\,\mathrm{mH},$$

$$C_1 = \frac{2\pi(7{,}98 - 1{,}357) \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}}{4\pi^2 \cdot 400\,\mathrm{VA}^{-1} \cdot 7{,}98 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1{,}357 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}}$$
$$= 2{,}434 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{AsV}^{-1} = 24{,}34\,\mathrm{nF},$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 400\,\mathrm{VA}^{-1} \cdot (7{,}98 - 1{,}357) \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}}$$
$$= 6{,}008 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{AsV}^{-1} = 6{,}008\,\mathrm{nF}.$$

Damit ist das Filter berechnet, Bild 9.11 zeigt seinen Aufbau.

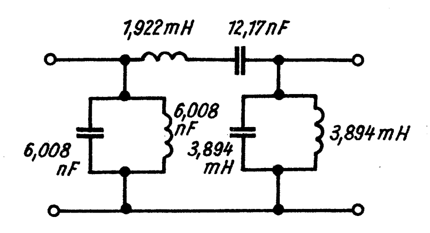


Bild 9.11
LC-Bandpaß (Beispiel auf S.105)

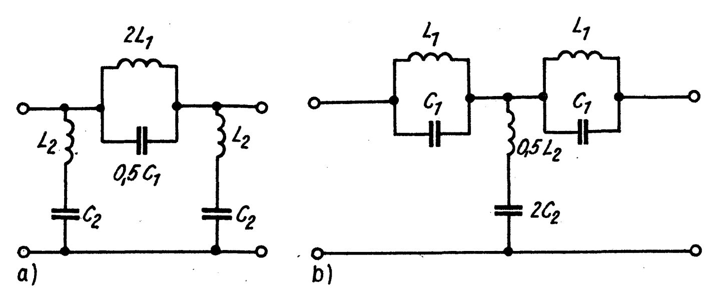


Bild 9.12 LC-Bandsperre, a) π-Schaltung, b) T-Schaltung

9.2.4. Bandsperre (Bild 9.12)

Die Bandsperre oder das Bandsperrfilter zeigt ein umgekehrtes Verhalten wie das Bandpaßfilter: Bei der Bandsperre wird ein Frequenzbereich zwischen f_1 und f_2 gedämpft, außerhalb des Sperrbereiches hat das Filter nur geringe Dämpfung.
Bild 9.13 zeigt die typische Dämpfungsfrequenzkurve des Bandpaßfilters. Wie zu erwarten war, ähneln sich auch die Dimensionierungen von Bandpaß und Bandsperre.
Beim Bandsperrfilter werden die Grenzfrequenzen «umgekehrt» korrigiert wie beim Bandpaßfilter: $f_2 : 1{,}4$; $f_1 \cdot 1{,}4$. Für die Korrektur des Wellenwiderstandes gilt für Bandsperre wie für Bandpaß: T-Schaltung – $Z = 1{,}25 R_A = 1{,}25 R_G$; π-Schaltung – $Z = 0{,}8 R_A = 0{,}8 R_G$. Ausgehend von den Bauelementebezeichnungen in Bild 9.12 gelten

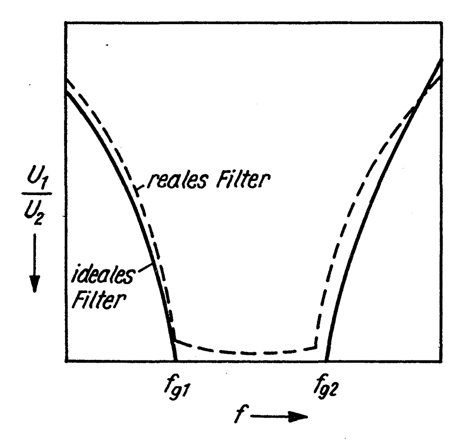


Bild 9.13
Übertragungsmaß U_1/U_2 einer Bandsperre in Abhängigkeit von der Frequenz

folgende Bemessungsgleichungen für den Bandsperrfilter:

$$L_1 = \frac{2\pi Z(f_{g2} - f_{g1})}{4\pi^2 f_{g1} f_{g2}}, \tag{9.8.}$$

$$L_2 = \frac{Z}{2\pi(f_{g2} - f_{g1})}, \tag{9.9.}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi Z(f_{g2} - f_{g1})}, \tag{9.10.}$$

$$C_2 = \frac{2\pi(f_{g2} - f_{g1})}{4\pi^2 Z f_{g1} f_{g2}}. \tag{9.11.}$$

Beispiel

Ein Bandsperrfilter soll den Frequenzbereich 500 ... 1 600 kHz dämpfen. Quell- und Abschlußwiderstand betragen je 600 Ω, es ist als T-Schaltung aufzubauen.

Lösung

Die korrigierten Grenzfrequenzen betragen:

$$f_{g1} = 5 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1} \cdot 1{,}4 = 7 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1} = 700\ \text{kHz},$$

$$f_{g2} = 1{,}6 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} : 1{,}4 = 1{,}143 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} = 1\,143\ \text{kHz}.$$

Damit wird

$$L_1 = \frac{2\pi \cdot 1{,}25 \cdot 600\ \text{VA}^{-1} \cdot (1{,}143 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} - 7 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1})}{4\pi^2 \cdot 1{,}143 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} \cdot 7 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1}}$$
$$= 6{,}609 \cdot 10^{-5}\ \text{VsA}^{-1} = 66{,}09\ \mu\text{H},$$

$$L_2 = \frac{1{,}25 \cdot 600\ \text{VA}^{-1}}{2\pi(1{,}143 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} - 7 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1})} = 2{,}694 \cdot 10^{-4}\ \text{VsA}^{-1}$$
$$= 269{,}4\ \mu\text{H},$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi(1{,}143 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} - 7 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1}) \cdot 1{,}25 \cdot 600\ \text{VA}^{-1}}$$
$$= 4{,}790 \cdot 10^{-10}\ \text{AsV}^{-1} = 479\ \text{pF},$$

$$C_2 = \frac{2\pi(1{,}143 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} - 7 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1})}{4\pi^2 \cdot 1{,}143 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} \cdot 7 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1} \cdot 1{,}25 \cdot 600\ \text{VA}^{-1}}$$
$$= 1{,}175 \cdot 10^{-10}\ \text{AsV}^{-1} = 117{,}5\ \text{pF}.$$

Bild 9.14 zeigt den Stromlaufplan des berechneten Bandsperrfilters.

9.2.5. m-Filter

Die Dämpfungscharakteristik der besprochenen Filtergrundtypen (in der Literatur auch *k-Filter* genannt) läßt sich durch sogenannte *m*-Glieder verbessern. Diese können entweder ein selbständiges Filter

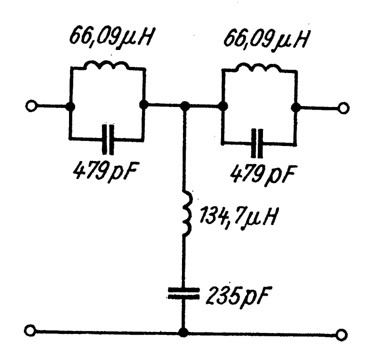


Bild 9.14
Bandsperrglied (Beispiel auf S. 107)

bilden oder in ein *k*-Filter «eingebaut» werden. Im letztgenannten Fall sind die *m*-Glieder oder das *m*-Glied am Eingang oder am Ausgang des *k*-Filters angeordnet. Dazu muß man wissen, daß ein halbes *m*-Filterglied (Bild 9.15) eine «*T*-Seite» und eine «π-Seite» hat. Je nach seinem Aufbau fügt man es so an das *k*-Filter an, daß T an T oder π an π liegt. Die Wirkung des *m*-Gliedes ist folgende: Außer seiner bekannten Dämpfungscharakteristik (Tief-, Hoch-, Bandpaß oder Bandsperre) hat das *m*-Glied zusätzlich einen ausgeprägten «Dämpfungspol», d. h. eine Frequenz, bei der die Dämpfung ein Maximum wird, um danach wieder geringer zu werden. Das kann man z. B. ausnutzen, wenn eine bestimmte Frequenz besonders stark gedämpft werden soll, z. B. die Pilottonfrequenz in einem Stereodekoder.
Außer dem Dämpfungspol bewirkt das *m*-Glied auch eine Einebnung des Wellenwiderstandes, der bei den *k*-Filtern im Sperrbereich nicht konstant ist. Diese Einebnung ist für manche Fälle wichtig. Mit diesen allgemeinen Informationen über das *m*-Filter werden dieBerechnungen von *LC*-Filtern beendet. Lesern, die sich für dieses nicht leichte Gebiet interessieren, wird das Buch, *Feldtkeller*, *R*., Einführung in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, S. Hirzel Ver-

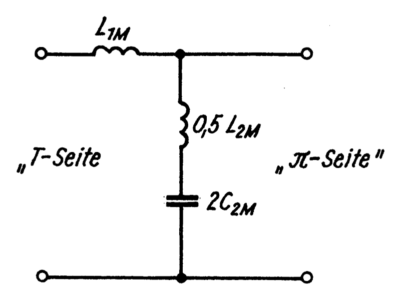


Bild 9.15
Stromlaufplan eines *k*-Halbgliedes (Prinzip)

lag, Stuttgart 1967, empfohlen. Dieses Standardwerk ist in den meisten technischen Büchereien vorhanden.

In diesem Zusammenhang eine Warnung: Die gezeigten *k*-Filterberechnungen stützen sich auf mehrjährige Erfahrungen in einem Entwicklungslaboratorium. In der Theorie der Filterliteratur findet der Leser den Korrekturfaktor 1,4 für die Grenzfrequenz nicht. Er ist hier eingeführt worden, weil er die praktischen Verluste der Filterglieder (besonders der Induktivitäten) berücksichtigt.

10. Aktive Vierpole – Der Transistor

10.1. Arbeitspunkteinstellung

Der Arbeitspunkt des Transistors läßt sich bei bekannter Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} bzw. bekannter Kollektor-Basis-Spannung U_{CB} oder bekanntem Kollektorstrom I_C durch die Wahl des Basisstromes I_B bzw. der Emitter-Basis-Spannung einstellen. Sind zwei der drei Größen – U_{CB} (oder U_{CE}), I_c und U_{BE} – bekannt, so ergibt sich automatisch die dritte. Das dürfte jedem bekannt sein, der sich etwas näher für Transistoren interessiert. Es gibt in der Praxis unterschiedliche Methoden, um U_{BE} oder I_B zu erzeugen. Sie sollen kurz erwähnt werden. a – Widerstand zwischen Basis und Pluspol der Speisespannung (beim pnp-Transistor: Minuspol der Speisespannung). Bild 10.1 zeigt die Schaltung. Der Widerstand R_B berechnet sich zu

$$R_B = \frac{U_{Bat} - U_{BE}}{I_B}; \qquad (10.1.)$$

U_{Bat} – Betriebsspannung (Batteriespannung) der Speisespannungsquelle, U_{BE} – Spannung zwischen Emitter und Basis, I_B – Basisstrom; U_{BE} und I_B gewinnt man aus dem Kennlinienfeld des Transistors, wenn sie nicht gegeben sind.

Beispiel

Der Basiswiderstand für einen Transistor *SF 137* ist zu berechnen. Gegeben sind: $U_{Bat} = 9$ V, $U_{BE} = 0{,}75$ V, $I_B = 25$ µA.

Lösung

Nach Gl. (10.1.) ist

$$R_B = \frac{9\ \text{V} - 0{,}75\ \text{V}}{2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{A}} = 3{,}3 \cdot 10^5\ \text{VA}^{-1} = 330\ \text{k}\Omega.$$

Damit liegt der Arbeitspunkt des Transistors fest.
b – Eine andere Möglichkeit, U_{BE} bzw. I_B zu erzeugen, besteht darin, den Widerstand R_B nicht an den Pluspol der Speisespannungsquelle (Minuspol beim pnp-Transistor) zu führen, sondern an den Kollektor (Bild 10.2). In diesem Fall ist

$$R_B = \frac{U_{CE} - U_{BE}}{I_B}; \qquad (10.2.)$$

U_{CE} – Spannung zwischen Emitter und Kollektor.

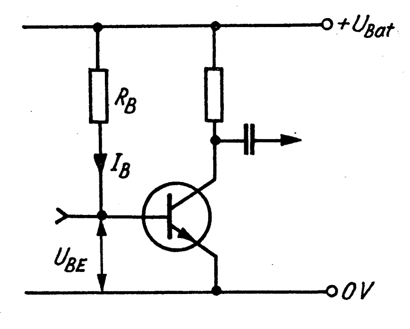


Bild 10.1
Vorspannungserzeugung von U_{BE} eines Transistors durch Widerstand zwischen Basis und Speisespannung

Beispiel

Der Basiswiderstand (Schaltung Bild 10.2) für einen Transistor *SC 239* ist zu berechnen. Bekannt sind: $U_{CE} = 6\,\text{V}$; $I_B = 50\,\mu\text{A}$; $U_{BE} = 0{,}75\,\text{V}$.

Lösung

Nach Gl. (10.2.) ist

$$R_B = \frac{6\,\text{V} - 0{,}75\,\text{V}}{5 \cdot 10^{-5}\,\text{A}} = 1{,}05 \cdot 10^5\,\text{VA}^{-1} = 105\,\text{k}\Omega.$$

Anmerkung

Da man auf Normwerte für die Widerstände angewiesen ist, wird der Wert von R_B in der Praxis fast immer von dem berechneten Wert abweichen. Das ist ohne weiteres zulässig, im vorliegenden Fall könnte auch ein Widerstand von 110 kΩ (*E-24*-Reihe, 5%) oder sogar von 100 kΩ (*E-12* oder *E-6*-Reihe, 10 oder 20%) verwendet werden.

c – Einstellung des Basisstromes mit einem Spannungsteiler zwischen Plus- und Minusklemme der Speisespannungsquelle (Bild 10.3). In diesem Fall werden die Spannungsteilerwiderstände nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$R_1 = \frac{U_{\text{Bat}} - U_{BE}}{I_B + I_Q} \tag{10.3.}$$

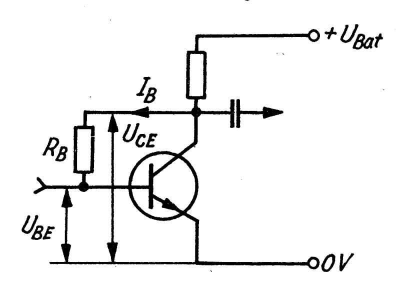


Bild 10.2
Vorspannungserzeugung von U_{BE} eines Transistors durch Widerstand zwischen Basis und Kollektor

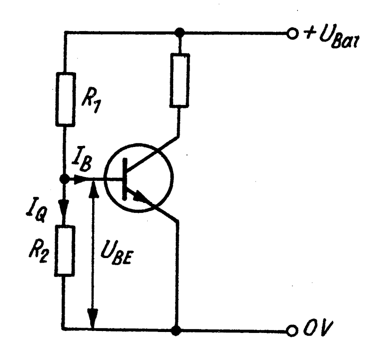


Bild 10.3
Vorspannungserzeugung U_{BE} durch Spannungsteiler parallel zur Speisespannung

und

$$R_2 = \frac{U_{BE}}{I_Q}; \tag{10.4.}$$

I_Q – Querstrom durch den Spannungsteiler.
Dieser Querstrom läßt sich in gewissen Grenzen frei wählen: Kleiner Strom I_Q bedeutet große Widerstände, also auch großer Eingangswiderstand der Verstärkerstufe, aber auch größere Abhängigkeit gegenüber Temperaturschwankungen usw. – dabei ändern sich die Parameter der Transistoren wesentlich stärker als z. B. die der Widerstände. Bei großem Strom I_Q wird die Speisespannungsquelle stärker belastet, der Eingangswiderstand der Verstärkerstufe kleiner usw. In der Praxis wählt man I_Q zwischen 1- bis 5mal I_B.

Beispiel

Ein Basisspannungsteiler für einen Transistor *SF 235* ist zu berechnen. Bekannt sind: $U_{Bat} = 10$ V, $U_{BE} = 0{,}7$ V, $I_B = 10$ μA. Der Querstrom I_Q des Spannungsteilers soll 40 μA betragen.

Lösung

Nach Gl. (10.3.) ist

$$R_1 = \frac{10\text{ V} - 0{,}7\text{ V}}{10^{-5}\text{ A} + 4 \cdot 10^{-5}\text{ A}} = 1{,}86 \cdot 10^5\text{ VA}^{-1} \approx 190\text{ k}\Omega$$

und nach Gl. (10.4.) ergibt sich

$$R_2 = \frac{0{,}7\text{ V}}{4 \cdot 10^{-5}\text{ A}} = 1{,}75 \cdot 10^4\text{ VA}^{-1} = 17{,}5\text{ k}\Omega.$$

In bezug auf die eventuellen Abweichungen (Normwerte der Widerstände) gilt wieder das bereits Erwähnte!

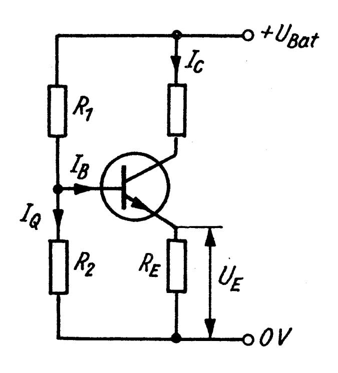


Bild 10.4
Wie Bild 10.3, aber mit einem zusätzlichen Emitterwiderstand R_E

In allen gezeigten Methoden, die Basisvorspannung bzw. den Basisstrom zu erzeugen, lag der Emitter an einem Pol der Speisespannung. In der Praxis findet man oft zwischen Speisespannung und Emitter einen Widerstand R_E (Bild 10.4). Durch ihn fließt der Emitterstrom I_E, der etwa betragsgleich dem Kollektorstrom I_C ist, und er bewirkt einen Spannungsabfall U_E ($= I_C R_E$). Das muß man bei der Berechnung der Widerstände für die Basisstromerzeugung berücksichtigen, indem in Gl. (10.1.) bis Gl. (10.4.) jeweils zu U_{BE} noch U_E addiert wird. An Hand eines Beispiels soll das mit dem Basisspannungsteiler gezeigt werden.

Beispiel

Wieder wird ein Transistor *SF 235* verwendet mit den gleichen Daten wie im letzten Beispiel, jedoch mit einem Emitterwiderstand von 2,2 kΩ. Der Strom I_C beträgt (lt. Kennlinienfeld) 1 mA.

Lösung

$$U_E = I_C R_E \tag{10.5.}$$

sowie mit den bekannten Werten

$$U_E = 10^{-3}\,\text{A} \cdot 2{,}2 \cdot 10^3\,\text{VA}^{-1} = 2{,}2\,\text{V}$$

und

$$R_1 = \frac{U_{\text{Bat}} - (U_{BE} + U_E)}{I_B + I_Q} \qquad \text{(10.3.a)}$$

hier,

$$R_1 = \frac{10\,\text{V} - (0{,}7\,\text{V} + 2{,}2\,\text{V})}{10^{-5}\,\text{A} + 4 \cdot 10^{-5}\,\text{A}} = 1{,}42 \cdot 10^5\,\text{VA}^{-1} \approx 140\,\text{k}\Omega$$

ebenso

$$R_2 = \frac{U_{BE} + U_E}{I_Q} \tag{10.4.a}$$

hier,

$$R_2 = \frac{0{,}7\ \text{V} + 2{,}2\ \text{V}}{4 \cdot 10^{-5}\ \text{A}} = 7{,}25 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \approx 71{,}5\ \text{k}\Omega .$$

In allen gezeigten Beispielen wurden die (moderneren) npn-Siliziumtransistoren verwendet. Bei pnp-Transistoren erfolgt die Berechnung jedoch genauso.

10.2. Parameter des Transistors

Bei Transistoren ist es üblich, sie als Vierpole anzusehen und ihr Verhalten durch die h-Parameter (kleine Frequenzen) oder die y-Parameter (große Frequenzen) zu beschreiben. Ausgangspunkt ist ein Vierpol gemäß Bild 10.5*. Für ihn gilt

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2 \quad \text{und} \quad i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$$

bzw.

$$i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2 \quad \text{und} \quad i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2 .$$

Die verschiedenen Vierpolparameter sind:

h_{11} – Kurzschlußeingangswiderstand u_1/i_1 für $u_2 = 0$,
h_{12} – Leerlaufspannungsrückwirkung u_1/u_2 für $i_1 = 0$,
h_{21} – Kurzschlußstromverstärkung (der Stromverstärkungsfaktor) i_2/i_1 für $u_2 = 0$,

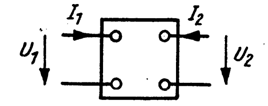


Bild 10.5
Der Transistor als Vierpol mit Angabe der Richtungen der Spannungen und Ströme

* In Zusammenhang mit Bild 10.5 sei auf einen wichtigen Punkt hingewiesen: Je nachdem, wie die Zählrichtung von u_2 bzw. i_2 definiert ist (Pfeile zum Vierpol oder vom Vierpol weisend), ergeben sich positive oder negative Werte für die Quotienten von $u_2 : i_1$, $u_1 : i_2$ usw. Das wieder führt zu scheinbar widersprüchlichen Vorzeichenangaben einiger Vierpolparameter bzw. der Betriebsgrößen, in denen diese Parameter enthalten sind. Die internationale Fachliteratur kennzeichnet die Zählrichtung der eingangs genannten Ausgangsgrößen nicht einheitlich! Deshalb Vorsicht bei dem Aufsuchen von Transistorgleichungen: Erst prüfen, wie die Zählrichtung der Ausgangsgrößen in der betreffenden Literaturstelle definiert ist!

h_{22} – Leerlaufausgangsleitwert i_2/u_2 für $i_1 = 0$,
y_{11} – Kurzschlußeingangsleitwert i_1/u_1 für $u_2 = 0$,
y_{12} – Kurzschlußrücksteilheit i_1/u_2 für $u_1 = 0$,
y_{21} – Kurzschlußvorwärtssteilheit i_2/u_1 für $u_2 = 0$,
y_{22} – Kurzschlußausgangsleitwert i_2/u_2 für $u_1 = 0$.

Außerdem verwendet man die sogenannten Determinanten $\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$ und $\Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$. Alle diese Parameter gelten nur für eine bestimmte Grundschaltung (Emitter-, Basis- oder Kollektorschaltung) und nur für einen bestimmten Arbeitspunkt. Für einige ausgezeichnete Arbeitspunkte werden sie vom Transistorhersteller angegeben, sonst gewinnt man sie aus dem Kennlinienfeld. Für die Umrechnung der h-Parameter in y-Parameter und umgekehrt gilt:

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}}, h_{12} = \frac{-y_{12}}{y_{11}}, h_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}}, h_{22} = \frac{\Delta y}{y_{11}}, \Delta h = \frac{y_{22}}{y_{11}},$$

$$y_{11} = \frac{1}{h_{11}}, y_{12} = \frac{-h_{12}}{h_{11}}, y_{21} = \frac{h_{21}}{h_{11}}, y_{22} = \frac{\Delta h}{h_{11}}, \Delta y = \frac{h_{22}}{h_{11}}.$$

Für die Umrechnung der h-Parameter in Basis- und Kollektorschaltung aus den h-Parametern der Emitterschaltung gelten folgende Umrechnungsformeln:

$$h_{11c} = h_{11e}, h_{12c} = 1 - h_{12e}, h_{21c} = -(1 + h_{21e}),$$

$$h_{22c} = h_{22e}, \Delta h_c = 1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e,$$

$$h_{11b} = \frac{h_{11e}}{1 + h_{21e} - h_{21e} + \Delta h_e}, h_{21b} = \frac{\Delta h_e - h_{12e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e},$$

$$h_{21b} = \frac{-h_{21e} - \Delta h_e}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e}, h_{22b} = \frac{h_{22e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e},$$

$$\Delta h_b = \frac{\Delta h_e}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \Delta h_e}.$$

Beispiel

Für den Transistor *SC 206* werden für den Arbeitspunkt $U_{CE} = 6$ V, $I_C = 2$ mA folgende h-Parameter angegeben:

$h_{11e} = 2{,}3\ \mathrm{k\Omega}$, $h_{12e} = 3{,}8 \cdot 10^{-4}$, $h_{21e} = 104$,
$h_{22e} = 48\ \mu\mathrm{S}$.

Wie lauten die y-Parameter der Emitterschaltung?

Lösung

Mit den Umrechnungsformeln auf Seite 115 sind:

$$y_{11e} = \frac{1}{2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}} = 4{,}35 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{AV^{-1}} = 435\ \mu\mathrm{S},$$

$$y_{12e} = \frac{-3{,}8 \cdot 10^{-4}}{2{,}3 \cdot 10^3 \text{ VA}^{-1}} = -1{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ AV}^{-1} = -0{,}165\,\mu\text{S},$$

$$y_{21e} = \frac{104}{2{,}3 \cdot 10^3 \text{ VA}^{-1}} = 4{,}52 \cdot 10^{-2} \text{ AV}^{-1} = 45{,}2 \text{ mS},$$

und mit $\Delta h = 2{,}3 \cdot 10^3 \text{ VA}^{-1} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ AV}^{-1} - 3{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 104$
$= 7{,}09 \cdot 10^{-2}$

ist

$$y_{22e} = \frac{7{,}09 \cdot 10^{-2}}{2{,}3 \cdot 10^3 \text{ VA}^{-1}} = 3{,}08 \cdot 10^{-5} \text{ AV}^{-1} = 30{,}8\,\mu\text{S}.$$

Man kann die y-Parameter der Emitterschaltung in die y-Parameter der Basisschaltung umrechnen, ähnlich wie es auf Seite 115 mit den h-Parametern erfolgte. Das hat oft einen praktischen Nutzen, denn bei hohen Frequenzen werden Transistoren oft in Basisschaltung betrieben (bei tiefen Frequenzen dagegen meist in Emitterschaltung). Folgende Umrechnungsformeln gelten für die y-Parameter der Basis- und Kollektorschaltung, ausgedrückt in den Parametern der Emitterschaltung:

$$y_{11c} = y_{11e}, \quad y_{12c} = -y_{11e} - y_{12e}, \quad y_{21c} = -y_{11e} - y_{21e},$$
$$y_{22c} = y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e},$$
$$y_{11b} = y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e},$$
$$y_{12b} = -y_{12e} - y_{22e}, \quad y_{21b} = -y_{21e} - y_{22e},$$
$$y_{22b} = y_{22e}.$$

Beispiel

Die im letzten Beispiel gefundenen y-Parameter der Emitterschaltung sollen in die y-Parameter der Basisschaltung umgerechnet werden.

Lösung

Nach den vorangegangenen Formeln ist:

$$y_{11b} = 4{,}35 \cdot 10^{-4} \text{ S} - 1{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ S} + 4{,}52 \cdot 10^{-2} \text{ S}$$
$$+ 3{,}08 \cdot 10^{-5} \text{ S} = 4{,}57 \cdot 10^{-2} \text{ S} = 45{,}7 \text{ mS},$$

$$y_{12b} = 1{,}65 \cdot 10^{-7} \text{ S} - (-4{,}52 \cdot 10^{-2} \text{ S}) = -4{,}52 \cdot 10^{-2} \text{ S}$$
$$= -45{,}2 \text{ mS},$$

$$y_{21b} = -4{,}52 \cdot 10^{-2} \text{ S} - 3{,}08 \cdot 10^{-5} \text{ S} = -4{,}52 \cdot 10^{-2} - 45{,}2 \text{ mS},$$

$$y_{22b} = 45{,}2 \text{ mS}.$$

10.3. Wechselstromverhalten des Transistors

Nachstehend einige wichtige Betriebsgrößen des Transistors und deren Gleichungen.

Stromverstärkung V_i

$$V_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22} \cdot R_L}; \tag{10.6.}$$

R_L – Lastwiderstand des Transistors.

Beispiel

Die Stromverstärkung des Transistors aus den letzten Beispielen (*SC 206*) ist zu berechnen. R_L soll 1,5 kΩ sein.

Lösung

$$V_i = \frac{104}{1 + 4{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}}} = 97{,}0$$

Spannungsverstärkung V_u

$$V_u = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-h_{21}R_L}{h_{11} + R_L \Delta h} \tag{10.7.}$$

Beispiel

Für den Transistor *SC 206* (er wird in den folgenden Beispielen ebenfalls verwendet) soll mit den bekannten *h*-Parametern die Spannungsverstärkung in Emitterschaltung berechnet werden.

$$V_u = \frac{-104 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}}}{2{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2}} = -64{,}8$$

Das Minuszeichen besagt, daß die Ausgangsspannung um 180° phasenverschoben zur Eingangsspannung erscheint.

Eingangswiderstand r_1

$$r_1 = \frac{u_1}{i_1} = \frac{h_{11} + R_L \Delta h}{1 + R_L h_{22}} \tag{10.8.}$$

Beispiel

$$r_1 = \frac{2{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2}}{1 + 1{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{VA^{-1}}}$$
$$= 2{,}24 \cdot 10^3\,\mathrm{VA^{-1}} = 2{,}24\,\mathrm{k\Omega},$$

Ausgangswiderstand r_2

$$r_2 = \frac{u_2}{i_2} = \frac{h_{11} + R_G}{\Delta h + R_G h_{22}}; \tag{10.9.}$$

R_G – Generatorwiderstand, d. h. der Innenwiderstand der Wechselstromquelle, die den Transistor ansteuert.

Beispiel

R_G soll 500 Ω betragen.

Lösung

$$r_2 = \frac{2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} + 500\ \mathrm{VA}^{-1}}{7{,}09 \cdot 10^{-2} + 500\ \mathrm{VA}^{-1} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV}^{-1}}$$
$$= 2{,}95 \cdot 10^4\ \mathrm{VA}^{-1} = 29{,}5\ \mathrm{k\Omega}$$

Und schließlich noch die Leistungsverstärkung V_p

$$V_p = -\frac{h_{21}{}^2 R_L}{(1 + h_{22}R_L)(h_{11} + R_L \Delta h)}, \qquad (10.10.)$$

$$V_p = \left| \frac{-104^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1}}{(1 + 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV}^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1}) \times (2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2})} \right|$$
$$= 6290,$$

oder, da $V_p = V_i V_u$ sein muß,

$$V_p = |\,97{,}0 \cdot (-64{,}8)\,| = 6290.$$

In diesem Zusammenhang ein wichtiger Hinweis: Gl. (10.6.) bis Gl. (10.10.) für die Betriebsgrößen der Transistorverstärkerstufe gelten allgemein, d. h. für alle 3 Grundschaltungen (Emitter-Basis- und Kollektorschaltung), natürlich nur mit den Parametern für die jeweilige Schaltung.

10.4. Gegengekoppelter Transistor

10.4.1. Spannungsgegenkopplung (Bild 10.6)

Für die h-Parameter des spannungsgegengekoppelten Transistors gelten folgende Beziehungen (die Größen der gegengekoppelten Stufe sind gestrichen):

$$h_{11}' = \frac{R_p h_{11}}{R_p + h_{11}}, \qquad (10.11.)$$

$$h_{12}' = \frac{R_p h_{12} - h_{11}}{R_p + h_{11}}, \qquad (10.12.)$$

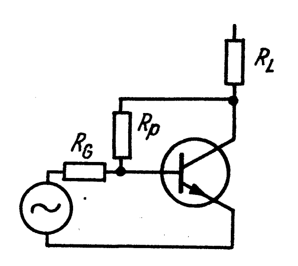


Bild 10.6
Spannungsgegenkopplung eines Transistors

$$h_{21}' = \frac{R_p - h_{21} - h_{11}}{R_p + h_{11}}, \tag{10.13.}$$

$$h_{22}' = \frac{R_p h_{22} + h_{21}}{R_p + h_{11}}, \tag{10.14.}$$

$$\Delta h' = \frac{R_p \Delta h + h_{11}}{R_p + h_{11}}. \tag{10.15.}$$

Beispiel

Die Transistorverstärkerstufe aus den letzten Beispielen soll mit $R_p = 30\ \text{k}\Omega$ gegengekoppelt werden. Die neuen h-Parameter sind zu berechnen.

Lösung

$$h_{11}' = \frac{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \cdot 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}}{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} = 2{,}14 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}$$

$$\doteq 2140\ \Omega$$

$$h_{12}' = \frac{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-4} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}}{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} = 7{,}16 \cdot 10^{-2}$$

$$h_{21}' = \frac{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \cdot 104 - 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}}{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} = 96{,}5$$

$$h_{22}' = \frac{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{AV}^{-1} + 104}{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}}$$

$$= 3{,}26 \cdot 10^{-3}\ \text{AV}^{-1} = 3{,}26\ \text{mS}$$

$$\Delta h' = \frac{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}}{3 \cdot 10^4\ \text{VA}^{-1} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1}} = 0{,}137$$

Ferner gilt für die spannungsgegengekoppelte Verstärkerstufe noch

$$V_i' = \frac{R_p h_{21} - h_{11}}{R_p + h_{11} + R_L(R_p h_{22} + h_{21})}, \tag{10.16.}$$

$$V_u' = \frac{-R_L(R_p h_{21} - h_{11})}{R_p h_{11} + R_L(R_p \Delta h + h_{11})}, \tag{10.17.}$$

$$r_1' = \frac{R_p(h_{11} + R_L \Delta h) + R_L h_{11}}{R_p(1 + R_L h_{22}) + R_L h_{21}}, \qquad (10.18.)$$

$$r_2' = \frac{R_p h_{11} + R_G(R_p + h_{11})}{h_{11} + R_p \Delta h + R_G(R_p h_{22} + h_{21})}, \qquad (10.19.)$$

$$V_p' = \frac{R_L(R_p h_{21} - h_{11})^2}{R_p + h_{11} + R_L(R_p h_{22} + h_{21})\, R_p h_{11} + R_L(R_p \Delta h + h_{11})}. \qquad (10.20.)$$

Beispiel

Die Betriebsgrößen der gegengekoppelten Verstärkerstufe aus dem letzten Beispiel sollen berechnet werden.

Lösung

$$V_i' = \frac{3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 104 - 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}}{3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \times (3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} + 104)} = 16{,}4,$$

$$V_u' = \frac{-1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}(3{,}10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 10^4 - 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}})}{3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \times (3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}})} = -61{,}8$$

$$r_1' = \frac{3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}}\,(2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2}) + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}}{3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}}\,(1 + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}) + 1{,}5 \times 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 104} = 402\ \mathrm{VA^{-1}} = 402\,\Omega$$

$$r_2' = \frac{3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 500\ \mathrm{VA^{-1}}\,(3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} + 2{,}3 \times 10^3\ \mathrm{VA^{-1}})}{2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2} + 500\ \mathrm{VA^{-1}} \times (3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} + 104)} = 1{,}49 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} = 1{,}49\ \mathrm{k\Omega}$$

$$V_p' = \frac{1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}\,(3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 104 - 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}})^2}{[3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}\,(3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \times 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} + 104)]\,[3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}\,(3 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2} + 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}})]} = 1010$$

oder, da $V_p = V_i V_u$ sein muß,

$$V_p = |16{,}4| \cdot |-61{,}8| = 1010$$

Anmerkung

Zu den gleichen Ergebnissen für die Betriebsgrößen der gegengekoppelten Verstärkerstufe wäre man auch gelangt, wenn man in Gl. (10.6.) bis Gl. (10.10.) die Parameter der gegengekoppelten Ver-

stärkerstufe entsprechend Gl. (10.11.) bis Gl. (10.15.) eingesetzt hätte. Das soll an Hand eines Beispiels bewiesen werden.

Beispiel

Die Stromverstärkung des hier als Beispiel gezeigten Transistors soll mit den Parametern der gegengekoppelten Stufe berechnet werden.

Lösung

In Gl. (10.6.) werden die Parameter gemäß Gl. (10.13.) und Gl. (10.14.) eingesetzt. Das ergibt

$$V_i = \frac{96{,}5}{1 + 3{,}26 \cdot 10^{-3}\ \text{AV}^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{3}\ \text{VA}^{-1}} = 16{,}4.$$

Das ist das gleiche Ergebnis, wie das nach Gl. (10.16.) berechnete.

10.4.2. Stromgegenkopplung (Bild 10.7)

Für die h-Parameter der stromgegengekoppelten Verstärkerstufe gelten folgende Beziehungen:

$$h_{11}' = \frac{h_{11} + R_s h_{21}}{1 + R_s h_{22}}, \tag{10.21.}$$

$$h_{12}' = \frac{h_{12} + R_s h_{22}}{1 + R_s h_{22}}, \tag{10.22.}$$

$$h_{21}' = \frac{h_{21} - R_s h_{22}}{1 + R_s h_{22}}, \tag{10.23.}$$

$$h_{22}' = \frac{h_{22}}{1 + R_s h_{22}}, \tag{10.24.}$$

$$\Delta h' = \frac{\Delta h + R_s h_{22}}{1 + R_s h_{22}}. \tag{10.25.}$$

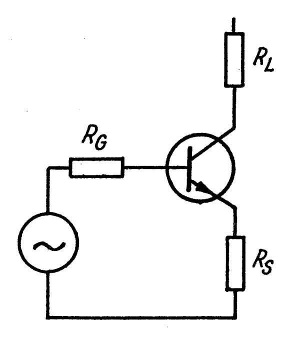


Bild 10.7
Stromgegenkopplung eines Transistors

Beispiel

Ein Transistor *SC 206* wird mit einem nicht kapazitiv überbrückten Emitterwiderstand $R_s = 500\,\Omega$ gegengekoppelt. Wie lauten die h-Parameter des gegengekoppelten Transistors? (Die h-Parameter der nicht gegengekoppelten Stufe sind die gleichen wie im letzten Beispiel.)

Lösung

$$h_{11}' = \frac{2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 104}{1 + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\mathrm{AV^{-1}}} = 5{,}30 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}}$$

$$= 53{,}0\ \mathrm{k\Omega}$$

$$h_{12}' = \frac{3{,}8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}}{1 + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}}$$

$$= 2{,}38 \cdot 10^{-2} = 0{,}0238$$

$$h_{21}' = \frac{104 - 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}}{1 + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\mathrm{AV^{-1}}} = 102$$

$$h_{22}' = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}}{1 + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}} = 4{,}69 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}$$

$$= 46{,}9\ \mu\mathrm{S}$$

$$\Delta h' = \frac{7{,}09 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}}{1 + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}}$$

$$= 9{,}27 \cdot 10^{-2} = 0{,}0927$$

Für die stromgegengekoppelte Transistorverstärkerstufe gelten außerdem folgende Beziehungen für die Betriebsgrößen:

$$V_i' = \frac{h_{21} - R_s h_{22}}{1 + h_{22}(R_s + R_L)}, \tag{10.26.}$$

$$V_u' = \frac{-(h_{21} - R_s h_{22})\, R_L}{h_{11} + R_s h_{21} + R_L(\Delta h + R_s h_{22})}, \tag{10.27.}$$

$$r_1' = \frac{h_{11} + R_L \Delta h + R_s(h_{21} + R_L h_{22})}{1 + h_{22}(R_L + R_s)}; \tag{10.28.}$$

$$r_2' = \frac{h_{11} + R_G + R_s(h_{21} + R_G h_{22})}{\Delta h + h_{22}(R_s + R_G)}, \tag{10.29.}$$

$$V_p' = \frac{R_L(h_{21} - R_s h_{22})^2}{[1 + h_{22}(R_s + R_L)]\,[h_{11} + R_s h_{21} + R_L(\Delta h + R_s h_{22})]}. \tag{10.30.}$$

Beispiel

Die Betriebsgrößen der stromgegengekoppelten Stufe des letzten Beispiels sind zu berechnen.

Lösung

$$V_i' = \frac{104 - 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}}{1 + 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} (5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}})} = 94{,}9$$

$$V_u' = \frac{-(104 - 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}}) \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}}}{2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 104 + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \times (7{,}09 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}})} = -2{,}86$$

$$r_1' = \frac{2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 7{,}09 \cdot 10^{-2} + 500\ \mathrm{VA^{-1}} \times (104 + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}})}{1 + 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} (1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 5 \cdot 10^2\ \mathrm{VA^{-1}})} = 4{,}97 \cdot 10^4\ \mathrm{VA^{-1}} = 49{,}7\ \mathrm{k\Omega}$$

$$r_2' = \frac{2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 500\ \mathrm{VA^{-1}} + 500\ \mathrm{VA^{-1}} \times (104 + 500\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}})}{7{,}09 \cdot 10^{-2} + 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} (500\ \mathrm{VA^{-1}} + 500\ \mathrm{VA^{-1}})} = 4{,}61 \cdot 10^5\ \mathrm{VA^{-1}} = 461\ \mathrm{k\Omega}$$

$$V_p' = \frac{-1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} (104 - 500\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}})^2}{[1 + 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} (500\ \mathrm{VA^{-1}} + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}})] \times [2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} + 500\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 104 + 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{VA^{-1}} \times (7{,}09 \cdot 10^{-2} + 500\ \mathrm{VA^{-1}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}})]} = 272$$

oder, da $V_p = |V_i'| \cdot |V_u'|$,

$$|94{,}9| \cdot |-2{,}86| = 271$$

Die Abweichung in der dritten Stelle ist durch das Runden der Zwischenergebnisse bedingt.
Auch bei der Berechnung der Betriebsgrößen der stromgegengekoppelten Verstärkerstufe gilt das auf Seite 120 bereits Erwähnte: Man kann die Parameter der gegengekoppelten Verstärkerstufe laut Gl. (10.21.) bis Gl. (10.25.) direkt in die immer gültigen Gl. (10.6.) bis Gl. (10.10.) einsetzen. Auf einen Beweis wird hier verzichtet.

10.5. Rechnen mit komplexen Transistorgrößen

Bei Hochfrequenz sind die Parameter der Transistoren nicht mehr reell, sondern als komplexe Größen anzusehen. Daraus ergibt sich, daß die Betriebsgrößen ebenfalls komplex sein müssen.
Es ist üblich, bei HF-Rechnungen mit den Leitwert- oder y-Parametern zu arbeiten, obwohl es prinzipiell auch mit den h-Parametern

möglich wäre. Die Umrechnungsformeln von h- in y-Parameter und umgekehrt gelten auch für komplexe Größen. Die Transistorhersteller geben oft die komplexen y-Parameter eines HF-Transistors an. Sie gelten aber dann nur für die Frequenz, die angegeben ist.
Auf die Rechnung eines Beispiels wird verzichtet – es wäre zu umfangreich und bietet nichts Neues. Das Beherrschen des Rechnens mit komplexen Zahlen wird vorausgesetzt. Ein Hinweis in diesem Zusammenhang: Bei Additionen von komplexen Werten wendet man vorteilhafter die «$a + jb$»-Form an (die reellen und die komplexen Zahlen werden getrennt addiert), bei Multiplikationen bzw. Divisionen ist es günstiger, die komplexen Größen in die Exponentialform Ze^{j} zu überführen.

10.6. Grenzfrequenzen des Transistors

Es gibt einige Grenzfrequenzen des Transistors, die sich zum Teil erheblich voneinander unterscheideen. Sie sind unterschiedlich definiert, und man muß sie sorgfältig auseinanderhalten:
f_α oder f_{h21b} stellt die Grenzfrequenz in Basisschaltung dar, d. h. die Frequenz, bei der die Spannungsverstärkung um das $1 : \sqrt{2} \approx 0{,}707$-fache zurückgegangen ist.
f_β oder f_{h21e} stellt die Grenzfrequenz in Emitterschaltung dar, d. h. die Frequenz, bei der die Spannungsverstärkung um das
$1 : \sqrt{2} \approx 0{,}707$fache zurückgegangen ist. Wegen

$$h_{21e} \approx \frac{h_{21b}}{1 - h_{21b}} \quad \text{oder} \quad \beta \approx \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

ergibt sich auch

$$f_{h21b} \approx f_{h21e} \frac{h_{21e}}{h_{21b}} \quad \text{oder} \quad f_{h21e} \approx f_{h21b} \frac{h_{21b}}{h_{21e}}; \qquad (10.31.)$$

h_{21e} – Stromverstärkung in Emitterschaltung ($= \beta$), h_{21b} – Stromverstärkung in Basisschaltung ($= \alpha$).

Beispiel

Von dem Transistor *AD 155* gibt der Hersteller *I. P. R. S. Banaşea* an: $f_{h21e} = 11$ kHz; $h_{21e} = 125$. Wie groß ist die Grenzfrequenz in Basisschaltung f_{h21b}?

Lösung

Nach Gl. (10.32). ist

$$f_{h21b} = 11\,\text{kHz}\,\frac{125}{\dfrac{11\,\text{kHz}}{1 + 11\,\text{kHz}}} = 1500\,\text{kHz} = 1{,}50\,\text{MHz}.$$

Man sieht aus dem Beispiel, wie groß der Unterschied zwischen f_{h21e} und f_{h21b} sein kann. Für grobe Schätzungen genügt die Näherungsgleichung

$$f_{h21b} \approx h_{21e} f_{h21e}. \qquad (10.31.a)$$

Beispiel

Mit der Näherungsformel Gl. (10.31.a) soll das letzte Beispiel überprüft werden.

Lösung

$$f_{h21b} \approx 125 \cdot 11\,\text{kHz} = 1370\,\text{kHz} = 1{,}37\,\text{MHz}$$

Ergebnis

Das Ergebnis der Näherungsformel Gl. (10.31.a) ist etwa 10% verschieden von dem der Gl. (10.31.) – dieser Fehler kann meist gegenüber den Exemplarsteuerungen der Transistoren vernachlässigt werden. Neben den erwähnten Grenzfrequenzen gibt es noch die sogenannte Transitfrequenz f_T. Sie stellt das Produkt von Frequenz und Span-

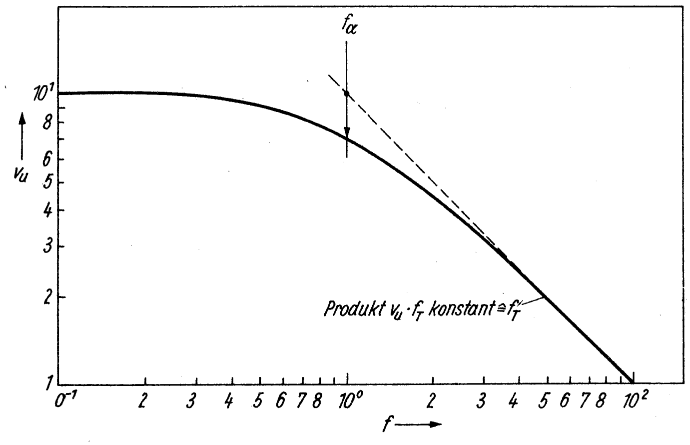


Bild 10.8 Zur Definition der Grenzfrequenzen f_α und f_T

nungsverstärkung bei sehr hohen Frequenzen dar, wenn diese die Spannungsverstärkung bereits beeinflußt (Bild 10.8). Der Verstärkungsabfall erfolgt in diesem Frequenzbereich mit etwa 6 dB/Oktave, ist also konstant. Näherungsweise kann man annehmen, daß $f_T = f_{\beta 1}$, d. h., bei dieser Frequenz ist die Spannungsverstärkung in Emitterschaltung auf 1 abgefallen.
Zwischen f_T und f_{h21b} besteht folgender angenäherter Zusammenhang:

$$f_T \approx 0{,}8 f_{h21b}. \qquad (10.32.)$$

Beispiel

Die Transitfrequenz f_T des Transistors *AD 155* (letzte Beispiele) soll berechnet werden.

Lösung

Nach Gl. (10.32.) ergibt sich

$$f_T \approx 0{,}8 \cdot 1{,}5 \text{ MHz} = 1{,}2 \text{ MHz}.$$

Die Genauigkeit ist mehr als ausreichend, da der Stromverstärkungsfaktor in diese Umrechnungen mit eingeht, dieser aber arbeitspunktabhängig und nur selten genau bekannt sein wird.

10.7. Darlington-Transistorstufe (Bild 10.9)

Die Kaskadeschaltung von zwei oder mehr galvanisch, d. h. gleichstrommäßig, miteinander verbundenen Transistoren gemäß Bild 10.9 nennt man *Darlington*-Schaltung. Man kann diese als einen «Super-

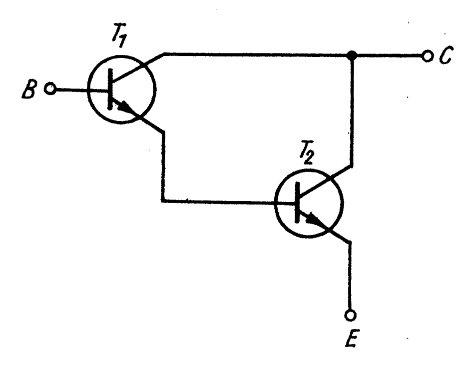


Bild 10.9
Stromlaufplan einer *Darlington*-Stufe

transistor» betrachten, mit der Stromverstärkung in Emitterschaltung

$$h_{21e,D} = h_{21e1} + h_{21e2} + h_{21e1}h_{21e2}; \qquad (10.33.)$$

$h_{21e,D}$ – Stromverstärkungsfaktor der *Darlington*-Schaltung in Emitterschaltung, h_{21e1} – Stromverstärkungsfaktor des 1. Transistors, h_{21e2} – Stromverstärkungsfaktor des 2. Transistors.
Zu welchen großen Stromverstärkungsfaktoren man gelangt, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Beispiel

2 Transistoren *SC 236* mit $h_{21e} = 380$ werden zu einer *Darlington*-Schaltung zusammengefügt. Wie groß ist der Gesamtverstärkungsfaktor?

Lösung

Nach Gl. (10.33.) ist

$$h_{21eD} = 380 + 380 + 380^2 = 145000.$$

Für die Grenzfrequenz der *Darlington*-Schaltung gilt

$$f_{h21eD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-[f_{h21e1}{}^2 + f_{h21e2}{}^2] + [(f_{h21e1}{}^2 + f_{h21e2}{}^2)^2 + 4f_{h21e1}{}^2 \cdot f_{h21e2}{}^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (10.34.)$$

Wenn $f_{h21e1} = f_{h21e2}$, vereinfacht sich Gl. (10.34.) zu

$$f_{h21eD} = (\sqrt{2} - 1)^{0,5} \cdot f_{h21e1} \approx 0{,}644 f_{h21e1}. \qquad (10.34.a)$$

Beispiel

Die Rechnung im letzten Beispiel soll durch die Gesamtfrequenz f_{h21eD} ergänzt werden ($f_{h21e1} = f_{h21e2} = 250$ MHz).

Lösung

Die Maßbezeichnungen sind aus Platzgründen fortgelassen. Da nur eine einzige Maßbezeichnung (MHz) vorkommt, ist das zulässig.

$$f_{h21D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-[250^2 + 250^2] + [(250^2 + 250^2)^2 + 4 \cdot 250^2 \cdot 250^2]^{0,5}\}^{0,5} = 161 \text{ MHz}$$

Zu dem gleichen Ergebnis wäre man in diesem Fall ($f_{h21e1} = f_{h21e2}$) mit der Näherungsgleichung Gl. (10.34.a) gelangt:

$$f_{h21D} = 0{,}644 \cdot 250 = 161 \text{ MHz}.$$

Eine weitere Näherungsgleichung für die Gesamtfrequenz f_{h21eD} ergibt sich, wenn $f_{h21e1} \gg f_{h21e2}$ bzw. $f_{h21e2} \gg f_{h21e1}$ ist. Man kann in diesen Fällen für f_{h21eD} etwa die kleinere Grenzfrequenz setzen, also im 1. Fall

$$f_{h21eD} \approx f_{h21e2}$$

und im 2. Fall

$$f_{h21eD} \approx f_{h21e1}. \tag{10.34.b}$$

Beispiel

Zwei Transistoren (1 Vorstufe mit *SC 236*, eine Endstufe mit *KD 501* von *TESLA*) sind als *Darlington*-Schaltung aufgebaut. Es werden folgende Werte angegeben: $f_{h21e1} = 3{,}1$ MHz, $f_{h21e2} = 0{,}12$ MHz, $h_{21e1} = 101$ und $h_{21e2} = 20$. Wie groß sind für die *Darlington*-Schaltung der (Gesamt-)Stromverstärkungsfaktor und die (Gesamt-)Grenzfrequenz?

Lösung

Nach Gl. (10.33.) ist

$$h_{21eD} = 101 + 20 + 101 \cdot 20 = 2140,$$

$$f_{h21eD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-[3{,}1^2 + 0{,}12^2] + [(3{,}1^2 + 0{,}12^2)^2 + 4 \cdot 3{,}1^2 \cdot 0{,}12^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}12 \text{ MHz}.$$

Die Maßbezeichnungen – einheitlich MHz – sind aus Platzgründen in der Rechnung fortgelassen.)
Zum gleichen Ergebnis würde man auch mit der Näherungsgleichung Gl. (10.34.b) gelangen:

$$f_{h21eD} \approx f_{h21e2} = 0{,}12 \text{ MHz}.$$

10.8. Kollektorstufe (Bild 10.10)

Die Kollektorstufe hat sich als «Impedanzwandlerstufe» einen festen Platz in der Schaltungstechnik transistorisierter Geräte erobert. Sie hat einen hochohmigen Eingang und einen relativ niederohmigen Ausgang. Für ihre überschlagmäßige Dimensionierung gibt es einige

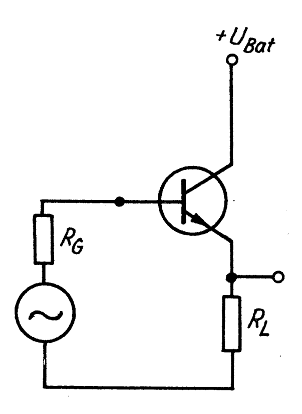


Bild 10.10
Stromlaufplan einer Kollektorstufe, stark vereinfacht

Näherungsgleichungen. (Die genaue Berechnung ist mit den Vierpolparameter für die Kollektorschaltung, Seite 115, möglich). Geht man von den exakten Dimensionierungsgleichungen aus, so muß man die Vierpolparameter der Kollektorschaltung kennen. Mit ihnen können dann die Betriebsgrößen der Kollektorschaltungen nach Gl. (10.6.) bis Gl. (10.10.) berechnet werden, genau so, wie es bei der Emitterstufe gezeigt wurde, für die die erwähnten Gleichungen aufgestellt wurden.

Beispiel

Ein Transistor *SF 126* soll in Kollektorschaltung mit R_L (Arbeitswiderstand) = 1 kΩ, R_G (Quellwiderstand) = 200 Ω betrieben werden. Seine Parameter in Emitterschaltung sind h_{11} = 1,25 kΩ, $h_{12} = 4{,}1 \cdot 10^{-4}$, $h_{21} = 110$, h_{22} = 27 μS. Wie lauten r_1, r_2 und V_u der Kollektorschaltung in diesem Beispiel?

Lösung

Nebenrechnung: Die *h*-Parameter der Kollektorschaltung (s. Seite 115)

$$h_{11c} = 1{,}25\ \text{k}\Omega,$$

$$h_{12c} = 1 - 4{,}1 \cdot 10^{-4} \approx 1,$$

$$h_{21c} = -(1 + 110) = -111,$$

$$\Delta h_c = 1{,}25 \cdot 10^3\ \text{VA}^{-1} \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{AV}^{-1} - 1(-111) \approx 110.$$

Damit wird:

$$r_1 = \frac{1{,}25 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} + 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} \cdot 110}{1 + 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV}^{-1}}$$

$$= 1{,}08 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} = 108\ \mathrm{k\Omega},$$

$$r_2 = \frac{1{,}25 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} + 200\ \mathrm{VA}^{-1}}{110 + 200\ \mathrm{VA}^{-1} \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV}^{-1}} = 13{,}2\ \mathrm{VA}^{-1}\ (=\Omega),$$

$$V_u = \frac{-(-111) \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1}}{1{,}25 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} + 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} \cdot 110} = 0{,}998.$$

Zu ähnlichem Ergebnis gelangt man auch mit der Näherungsgleichung

$$r_{1c} \approx |h_{21c}|\ R_L. \qquad (10.35.)$$

Beispiel

Mit der Näherungsgleichung Gl. (10.35.) soll der im letzten Beispiel berechnete Eingangswiderstand überprüft werden.

Lösung

$$r_{1c} = 111 \cdot 10^3\ \mathrm{VA}^{-1} = 1{,}11 \cdot 10^5\ \mathrm{VA}^{-1} = 111\ \mathrm{k\Omega}$$

Die Abweichung zwischen exaktem (108 kΩ) und genähertem (111 kΩ) Eingangswiderstand ist kleiner als 3%. Gl. (10.35.) liefert für die Praxis hinreichend genaue Ergebnisse, solange R_L (der Lastwiderstand)* nicht größer als h_{11} ist.

10.9. Rechnen mit y-Parametern

Der Vollständigkeit halber sollen noch die Gleichungen für die Berechnung der Betriebsgrößen mit y-Parametern angegeben werden. Es ist der Eingangswiderstand

$$r_1 = \frac{1 + y_{22}R_L}{y_{11} + \Delta_y R_L}, \qquad (10.36.)$$

der Ausgangswiderstand

$$r_2 = \frac{1 + y_{11}R_G}{y_{22} + \Delta y R_G}, \qquad (10.37.)$$

* Beachte, daß R_L wirklich der Lastwiderstand der Stufe ist – nicht nur der ohmsche Widerstand in der Kollektorleitung!

die Stromverstärkung

$$V_i = \frac{y_{21}}{y_{11} + \Delta y R_L}, \tag{10.38.}$$

die Spannungsverstärkung

$$V_u = \frac{-y_{21} R_L}{1 + y_{22} R_L}, \tag{10.39.}$$

die Leistungsverstärkung

$$V_p = \frac{{y_{21}}^2 R_L}{(1 + y_{22} R_L)(y_{11} + \Delta y R_L)}. \tag{10.40.}$$

Beispiel

Die Berechnung der Betriebsgrößen auf Seite 117/118 soll mit den y-Parametern wiederholt werden.

Lösung

Die y-Parameter des *SC 206* lauteten: $y_{11} = 435\ \mu S$, $y_{12} = -0{,}165\ \mu S$, $y_{21} = 45{,}2$ mS, $y_{22} = 30{,}8\ \mu S$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\Delta y &= 4{,}35 \cdot 10^{-4}\ AV^{-1} \cdot 3{,}08 \cdot 10^{-5}\ AV^{-1} \\ &\quad - (-1{,}65 \cdot 10^{-7}\ AV^{-1}) \cdot 4{,}52 \cdot 10^{-2}\ AV^{-1} \\ &= 2{,}09 \cdot 10^{-8} AV^{-1} = 0{,}0209\ \mu S.\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich $R_L = 1{,}5\ k\Omega$; $R_G = 500\ \Omega$.
Mit diesen Werten wird berechnet:
Nach Gl. (10.36.) der Eingangswiderstand

$$r_1 = \frac{1 + 3{,}08 \cdot 10^{-5}\ AV^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\ VA^{-1}}{4{,}35 \cdot 10^{-4} AV^{-1} + 2{,}09 \cdot 10^{-8}\ AV^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\ VA^{-1}}$$
$$= 2{,}24 \cdot 10^3\ VA^{-1} = 2{,}24\ k\Omega;$$

der Ausgangswiderstand nach Gl. (10.37.)

$$r_2 = \frac{1 + 4{,}35 \cdot 10^{-4}\ AV^{-1} \cdot 500\ VA^{-1}}{3{,}08 \cdot 10^{-5}\ AV^{-1} + 2{,}09 \cdot 10^{-8}\ AV^{-1} \cdot 500\ VA^{-1}}$$
$$= 2{,}95 \cdot 10^4\ VA^{-1} = 29{,}5\ k\Omega,$$

die Stromverstärkung nach Gl. (10.38.)

$$V_i = \frac{4{,}52 \cdot 10^{-2}\ AV^{-1}}{4{,}35 \cdot 10^{-4} AV^{-1} + 2{,}09 \cdot 10^{-8}\ AV^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\ VA^{-1}}$$
$$= 96{,}9,$$

die Spannungsverstärkung nach Gl. (10.39.)

$$V_u = \frac{-4{,}52 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{AV^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{3}\ \mathrm{VA^{-1}}}{1 + 3{,}08 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{3}\ \mathrm{VA^{-1}}} = -64{,}8,$$

die Leistungsverstärkung nach Gl. (10.40.)

$$V_p = \frac{(4{,}52 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{AV^{-1}})^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{3}\mathrm{VA^{-1}}}{(1 + 3{,}08 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{AV^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{3}\ \mathrm{VA^{-1}})(4{,}35 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{AV^{-1}} + 2{,}09 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{AV^{-1}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{3}\ \mathrm{VA^{-1}})}$$
$$= 6280,$$

oder, da $V_p = |V_i|\,|V_u|$,

$$V_p = 96{,}9 \cdot 64{,}8 = 6280.$$

Die Ergebnisse stimmen mit Ausnahme der Stromverstärkung (−4%) und der Leistungsverstärkung (−10%) exakt mit den auf Seite 117/118 berechneten Werten überein.

